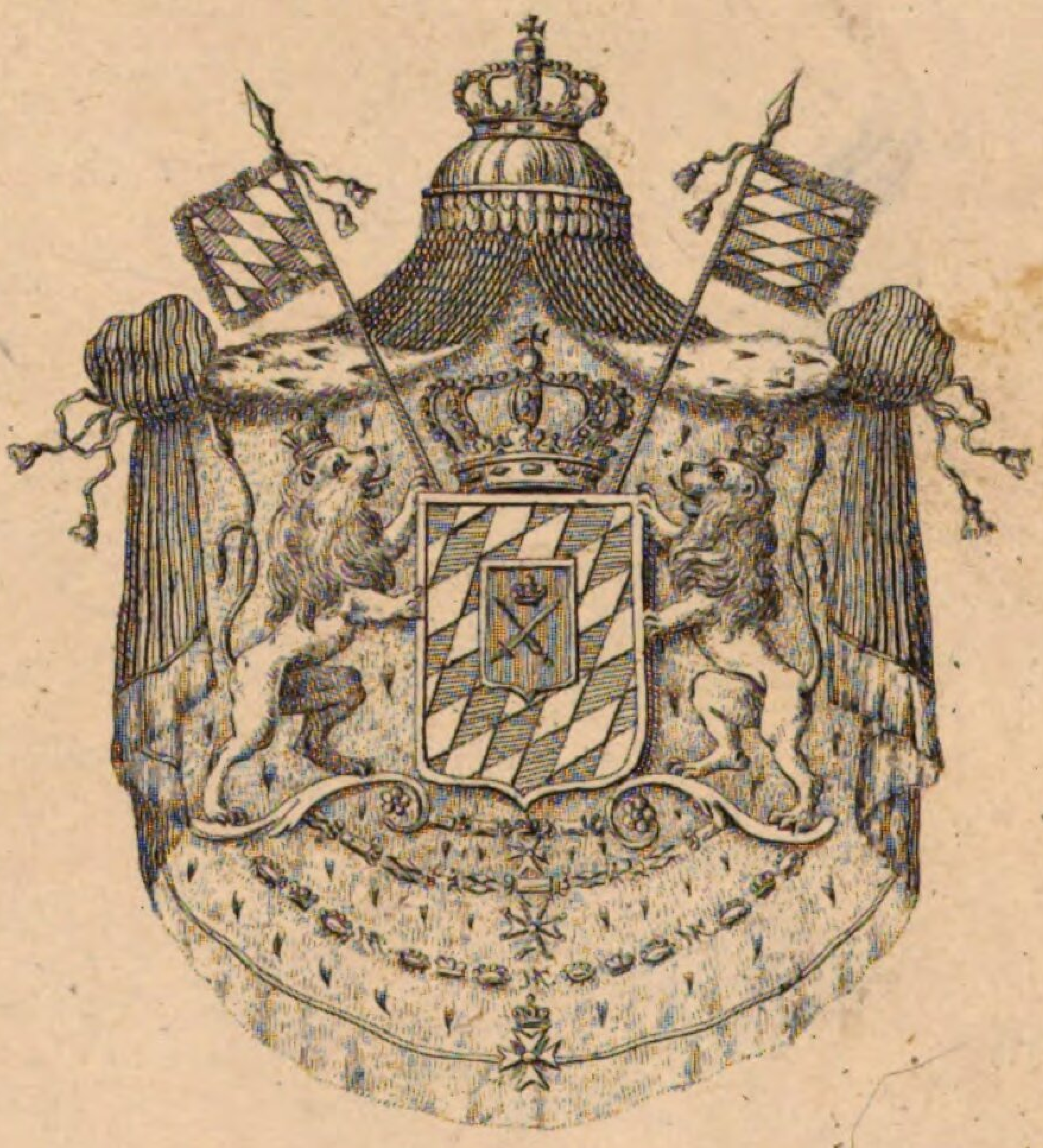
4° Math. A. 162 m



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Die
Undulationstheorie des Lichtes.

Eine Beilage

zu

den Lehrbüchern der Physik

von

K. W. Knochenhauer.

Mit fünf Figurentafeln.

Berlin.
Gedruckt und verlegt bei G. Reimer.
1839.

74. D.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Die Undulationstheorie des Lichtes hat in der neuern Zeit durch die vereinten Arbeiten der Physiker und Mathematiker eine so bedeutende Ausbildung gewonnen, dafs sie nicht nur der Nachwelt als ein schönes Denkmal von dem wissenschaftlichen Streben unserer Tage zurückbleiben wird, sondern dafs sie auch jetzt schon, wo sie noch nicht in allen ihren Theilen vollendet ist, die Aufmerksamkeit eines jeden, der eine wissenschaftliche Kenntnifs der Physik besitzen will, sicher in gleichem Maafse in Anspruch nehmen mufs, als wir es von der Gravitationslehre vorauszusetzen pflegen. Und doch läfst sich nicht verkennen, dafs ihre Kenntnifs noch immer nicht so weit verbreitet ist, als man es der Wissenschaft wegen wünschen möchte und jetzt einmal um so eher erwarten sollte, wo grade die neuesten Entdeckungen über die strahlende Wärme auch für diese ähnliche Gesetze nachweisen, wie sie die Undulationstheorie beim Lichte kennen lehrt. Mag es dahin gestellt bleiben, welche andern Gründe von einem gründlichen Studium dieser Theorie zurückhalten, ein nicht geringes Hindernifs ihrer weitern Verbreitung scheint darin zu liegen, dafs die Lehrbücher der Physik, die den meisten zur Hand sind, über sie zu weniges und fast nur Unzusammenhängendes enthalten, auch wohl ihrer Natur nach nur enthalten können, die Quellen aber nicht jedem in der Art zugänglich sind, dafs er sich die einzelnen Aufsätze in den gehörigen Zusammenhang zu bringen und dadurch die nöthige Uebersicht über das Ganze zu gewinnen vermöchte. Um diesem letztern Uebelstande in etwas abzuhelfen, übernahm ich die vorliegende Arbeit, welche die bisherigen Forschungen über die Undulationstheorie des Lichtes in Kürze darlegen soll. Bei der Ausführung behielt ich vornehmlich zwei Gesichtspuncte im Auge: einmal setzte ich, um das Werk nicht über die Gebühr auszudehnen, eine genügende Bekanntschaft mit den Beobachtungen voraus, welche die Theorie zu erklären beabsichtigt, ja auch einige Kenntnifs der Theorie selbst, wie weit sie die gewöhnlichen Lehrbücher der Physik gewähren, denn ich glaubte annehmen zu dürfen, dafs niemand an ein vollständiges Studium derselben gehen würde, der nicht über Einzelnes schon nachgedacht hätte; zweitens stellte ich mir die Aufgabe, die vorhandenen Arbeiten, natürlich soweit

Vorrede.

Die Undulationstheorie des Lichtes hat in der neuern Zeit durch die vereinten Arbeiten der Physiker und Mathematiker eine so bedeutende Ausbildung gewonnen, dafs sie nicht nur der Nachwelt als ein schönes Denkmal von dem wissenschaftlichen Streben unserer Tage zurückbleiben wird, sondern dafs sie auch jetzt schon, wo sie noch nicht in allen ihren Theilen vollendet ist, die Aufmerksamkeit eines jeden, der eine wissenschaftliche Kenntnifs der Pysik besitzen will, sicher in gleichem Maafse in Anspruch nehmen mufs, als wir es von der Gravitationslehre vorauszusetzen pflegen. Und doch läfst sich nicht verkennen, dafs ihre Kenntnifs noch immer nicht so weit verbreitet ist, als man es der Wissenschaft wegen wünschen möchte und jetzt zumal um so eher erwarten sollte, wo grade die neuesten Entdeckungen über die strahlende Wärme auch für diese ähnliche Gesetze nachweisen, wie sie die Undulationstheorie beim Lichte kennen lehrt. Mag es dahin gestellt bleiben, welche andern Gründe von einem gründlichen Studium dieser Theorie zurückhalten, ein nicht geringes Hindernifs ihrer weitern Verbreitung scheint darin zu liegen, dafs die Lehrbücher der Physik, die den meisten zur Hand sind, über sie zu weniges und fast nur Unzusammenhängendes enthalten, auch wohl ihrer Natur nach nur enthalten können, die Quellen aber nicht jedem in der Art zugänglich sind, dafs er sich die einzelnen Aufsätze in den gehörigen Zusammenhang zu bringen und dadurch die nöthige Uebersicht über das Ganze zu gewinnen vermöchte. Um diesem letztern Uebelstande in etwas abzuhelfen, übernahm ich die vorliegende Arbeit, welche die bisherigen Forschungen über die Undulationstheorie des Lichtes in Kürze darlegen soll. Bei der Ausführung behielt ich vornehmlich zwei Gesichtspuncte im Auge; einmal setzte ich, um das Werk nicht über die Gebühr auszudehnen, eine genügende Bekanntschaft mit den Beobachtungen voraus, welche die Theorie zu erklären beabsichtigt, ja auch einige Kenntnifs der Theorie selbst, wie weit sie die gewöhnlichen Lehrbücher der Physik gewähren, denn ich glaubte annehmen zu dürfen, dafs niemand an ein vollständiges Studium derselben gehen würde, der nicht über Einzelnes schon nachgedacht hätte; zweitens stellte ich mir die Aufgabe, die vorhandenen Arbeiten, natürlich soweit

es meine Kräfte erlaubten, eng an einander zu reihen, damit das Ganze sich mehr als das Werk eines einzelnen, denn als eine Zusammenstellung aus fremdartigen Theilen erwiese. Hatte ich bei dieser Absicht gleich mehere Vorarbeiten nach meiner Weise umzugestalten, hier fortzulassen, dort hinzuzufügen, so hielt ich dies doch nicht nur um deretwillen für nöthig, welche aus meiner Arbeit die Theorie kennen lernen wollen und denen, wie überhaupt bei mathematischen Untersuchungen, ein schlechter Dienst geschieht, wenn man ihnen nur kürzere Auszüge aus den Arbeiten anderer darbietet, sondern ich glaubte auch dann nur zur weitern Förderung der Wissenschaft wenigstens etwas beitragen zu können, wenn ich auf eigenem Wege fortzuschreiten versuchte. In einer dritten Beziehung bin ich mir dagegen nicht gleich geblieben; anfänglich glaubte ich, dafs es zweckmäfsig sein würde, neben meinem Gange noch eine, wenn auch nur gedrängte Darstellung von den Arbeiten anderer zu geben, namentlich wo ich von ihnen in den Principien abwich oder wo sie eine abweichende Art der mathematischen Entwicklung gebraucht hatten, aber späterhin sah ich ein, dafs ich damit, besonders bei den Untersuchungen über die ungleich elastischen Medien, zu geringen Nutzen gewähren würde, indem ich die Erwerbung einer vollständigen Kenntnifs des zur Erweiterung der Theorie bisher Geleisteten doch dem Studium der Quellenschriften überlassen müfste; so gab ich dieses Vorhaben wieder auf, obschon der erste Theil der Arbeit noch manches enthält, was bei einer gleichmäfsigen Bearbeitung hätte fortfallen müssen. — Zuletzt habe ich mich wohl noch wegen der leichten Art zu entschuldigen, mit der in den einzelnen Abschnitten die Quellen citirt sind, nach denen ich gearbeitet habe. Die Ursache ist diese. Da es mir lästig war, überall vollständige Nachweisungen zu geben, ich auch glaubte, sie schon deshalb übergehen zu dürfen, weil ich, soweit es nur irgendwie anging, durch Beibehaltung der einmal eingeführten Bezeichnungen die Vergleichung meiner Darstellung mit den ihr zum Grunde liegenden Quellen zu erleichtern suchte, so wollte ich am Ende der Arbeit die Aufsätze und Schriften verzeichnen, welche Untersuchungen über die Undulationstheorie des Lichtes enthalten; seitdem hat aber Hr. Prof. *Dove* im zweiten Bande des von ihm herausgegebenen Repertoriums der Physik dieselben in der gesammten Literatur der Optik zusammengestellt, so dafs ich mich nun auf seine Angaben beziehen kann.

Meiningen, den 2ten Januar 1839.

K. W. Knochenhauer.

Inhalt.

§. I. Die Gleichungen, welche die Schwingungen des Lichtes in einem gleichförmig elastischen Medium bestimmen. . . . . Seite 1
§. II. Zusammensetzung der Lichtstrahlen. — 7
§. III. Von der Beugung des Lichtes. . . . . — 10
§. IV. Von der Brechung und Zerstreuung des Lichtes. . . . . — 51
§. V. Die Schwingungsgleichungen des reflectirten und gebrochenen Strahles. Circulare und elliptische Polarisation. . . . . — 73
§. VI. Ueber einige Interferenzphänomene durch Reflexion. . . . . — 83
§. VII. Reflexion von Metallflächen . . . . — 85
§. VIII. Ueber die Farben dünner Blättchen. . . . . — 88
§. IX. Einige mathematische Sätze als Einleitung zu den Gleichungen, welche die Lichtschwingungen in ein- und zweiaxigen Medien bestimmen. . . . . — 96
§. X. Die Schwingungsgleichungen des Lichtes in ein- und zweiaxigen Medien. . . . . . — 112
§. XI. Die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung. . . . . — 126
§. XII. Ueber die Polarisationsrichtung des gewöhnlich und des ungewöhnlich gebrochenen Strahls. — 135
§. XIII. Die Farbenzerstreuung in ungleich elastischen Medien. . . . . — 136
§. XIV. Ueber den Einfluſs der Oberflächen einaxiger Crystalle auf das reflectirte und gebrochene Licht. . . . . — 140
§. XV. Ueber den Einfluſs der Oberflächen zweiaxiger Crystalle auf das reflectirte und gebrochene Licht. . . . . — 158
§. XVI. Von der Interferenz des gewöhnlich und des ungewöhnlich gebrochenen Strahls nach ihrem Durchgange durch Platten ein- oder zweiaxiger Crystalle. . . . . — 170
§. XVII. Ueber die Farbenringe um die Axe des Bergcrystalls. . . . . — 195

§. I.

Die Gleichungen, welche die Schwingungen des Lichtes in einem gleichförmig elastischen Medium bestimmen.

Die Undulationstheorie des Lichtes geht von der Annahme aus, daſs das Licht in Schwingungen eines elastischen Fluidums besteht, und wendet daher die allgemeinen Gesetze der Schwingungen auf dasselbe an. Doch da nicht alle Undulationen auch desselben Fluidums als Licht erregend betrachtet werden können, andere durch besondere Verhältnisse bestimmt sind, so beschränkt sie sich durch gewisse aus der Erfahrung entlehnte Grundsätze, welche nach dem jetzigen Stande der Theorie folgende sind:

1. Durch den ganzen Weltraum ist ein äuſserst elastisches Fluidum, Aether genannt, verbreitet. Derselbe findet sich auch in dem schon mit Materie erfüllten Raume von gleicher Dichtigkeit vor, gelangt aber in dieser Verbindung mit den Körpern zu einer andern Elasticität, die in mehreren Crystallen nach verschiedenen Seiten mit verschiedener Kraft wirkt. Betrachtet man die elastische Kraft nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen, so heiſsen die Körper gleichförmig elastische, einaxige und zweiaxige Medien, je nachdem sich in ihnen die Elasticität des Aethers nach allen dreien, oder nach zweien oder nach keiner der Hauptrichtungen gleich bleibt. Z. B. Glas in gewöhnlichem Zustande ist ein gleichförmig elastisches, Kalkspath ein einaxiges und Salpeter ein zweiaxiges Medium.

2. Die leuchtenden Körper versetzen den Aether in regelmäſsige Schwingungen, die sich nach der Farbe des Lichtes in längerer oder kürzerer Zeitdauer vollenden und stetig wiederholen. Das rothe Licht giebt Schwingungen von der längsten, das violette von der kürzesten Dauer.

3. Die Schwingungen der Aethertheilchen erfolgen in einer zur Fortpflanzung des Lichtes oder zum Lichtstrahle senkrechten Richtung; umgekehrt pflanzt jedes schwingende Theilchen die Bewegung senkrecht gegen die Richtung seiner Schwingung fort. Sollte zu gleicher Zeit noch eine Schwingung längst des Lichtstrahles statt finden, so wirkt sie wenigstens nicht auf das Auge, ja sie muſs auch, wie es scheint, in allen andern Beziehungen ganz auſser Beachtung bleiben.

4. Zwei zu einander senkrechte Schwingungen sind unabhängig von einander und bilden, wenn sie in demselben Lichtstrahle vorhanden sind, gewöhnliches Licht. Geht die Schwingung nur nach einer Richtung, so heiſst das Licht nach dieser Richtung polarisirt *).

5. So lange sich das Licht durch vollkommen durchsichtige Medien verbreitet, gilt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, also ist in diesem Falle das Product aus der bewegten Masse des Aethers und dem Quadrate der Schwingungsschnelligkeit unverändert dasselbe. —

*) Gegen die frühere Annahme glaube ich diese Benennung mit Neumann einführen zu müssen.

Nach diesen Voraussetzungen entwickeln wir die Gleichungen für die Lichtschwingung in einem gleichförmig elastischen Medium. Es befinde sich ein Aethertheilchen $\mathfrak{m}$ in einem solchen Medium an einer Stelle, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind. Ein anderes Aethertheilchen m werde durch die Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ bestimmt, seine Entfernung von $\mathfrak{m}$ sei $=r$, und schliefse mit den Coordinaten x, y, z die Winkel α, β, γ ein; dann ist

$$r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

und

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{\Delta y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{\Delta z}{r}.$$

Den übrigen Aethertheilchen m', m'', m''' .... gebe man die ähnlich bezeichneten Coordinaten $x+\Delta' x$, $y+\Delta' y$, $z+\Delta' z$; $x+\Delta'' x$ ...., nenne ihre Entfernungen r', r'', r''' .... und die vorher genannten Winkel α', β', γ'; α'', β'', γ'' .... Ferner nehme man an, dafs die Wirkung zweier Theilchen m und $\mathfrak{m}$ auf einander nach r erfolge und, sie sei übrigens anziehender oder abstofsender Art, irgend einer Function der Entfernung multiplicirt mit dem Producte der Massen, also dem Ausdrucke $\mathfrak{m}\, m f(r)$ gleich komme. Zerlegt man diese Wirkung nach den angenommenen Coordinatenaxen, so ist der Theil

$$\begin{aligned}
\text{nach } x &= \mathfrak{m}\, m f(r) \cos\alpha,\\
\text{nach } y &= \mathfrak{m}\, m f(r) \cos\beta,\\
\text{nach } z &= \mathfrak{m}\, m f(r) \cos\gamma;
\end{aligned}$$

und die Totalwirkung sämmtlicher m, m', m'' .... auf $\mathfrak{m}$ wird

$$\begin{aligned}
\text{nach } x &= \mathfrak{m}\, m f(r) \cos\alpha + \mathfrak{m}\, m' f(r') \cos\alpha' + \ldots\\
&= \mathfrak{m}\, S[m f(r) \cos\alpha],\\
\text{nach } y &= \mathfrak{m}\, m f(r) \cos\beta + \mathfrak{m}\, m' f(r') \cos\beta' + \ldots\\
&= \mathfrak{m}\, S[m f(r) \cos\beta],\\
\text{nach } z &= \mathfrak{m}\, m f(r) \cos\gamma + \mathfrak{m}\, m' f(r') \cos\gamma' + \ldots\\
&= \mathfrak{m}\, S[m f(r) \cos\gamma],
\end{aligned}$$

wo S die Summe der ähnlichen Glieder bezeichnet. Beim Gleichgewichte des Aethers bleibt $\mathfrak{m}$ in Ruhe oder die Gesammtwirkung aller Theilchen auf dasselbe hebt sich auf; daraus folgt

$$S[m f(r) \cos\alpha] = 0; \quad S[m f(r) \cos\beta] = 0; \quad S[m f(r) \cos\gamma] = 0. \tag{1}$$

Nun komme durch die Lichtschwingung $\mathfrak{m}$ aus seiner Stelle, und erlange zur Zeit t die Coordinaten

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z;$$

denn geht der Strahl, wie man der Kürze wegen annehmen kann, nach der Richtung der z, so erfolgen nach dem dritten Grundsatze die Schwingungen nur in der Ebene der xy (der sogenannten Wellenebene), und in Betreff der dritten Coordinate z darf keine Zu- oder Abnahme vorkommen. Jedes andere Theilchen nimmt je nach seinem Standpuncte an der Schwingung den entsprechenden Antheil; deshalb verwandeln sich die Coordinaten von m in

$$x+\Delta x+\xi+\Delta\xi, \quad y+\Delta y+\eta+\Delta\eta, \quad z+\Delta z,$$

und die von m', m'' .... in ähnliche Ausdrücke. Die Anziehung, welche jetzt m auf $\mathfrak{m}$ ausübt, ist

$$\left.\begin{aligned}
\text{nach } x &= \mathfrak{m}\, m f(R) \cos A,\\
\text{nach } y &= \mathfrak{m}\, m f(R) \cos B,\\
\text{nach } z &= \mathfrak{m}\, m f(R) \cos \Gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wenn R die nunmehrige Entfernung beider Theilchen von einander, und A, B, Γ die veränderten, vorher mit α, β, γ bezeichneten Winkel bedeuten. Allein die Lichtschwingungen besitzen im Allgemeinen nur eine unbedeutende Ausdehnung oder Weite, deshalb hat sich R nur um weniges gegen r verändert, und es mufs erlaubt sein, wenn man $R = r(1+\varepsilon)$ setzt, schon die zweiten Potenzen von ε zu vernachläfsigen, auch demgemäfs die zweiten Potenzen von ξ, η, $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und ihre Producte zu übergehen. Nach diesen Bestimmungen findet sich

$$R^2 = r^2(1+\varepsilon)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta\eta)^2 + (\Delta z)^2, \text{ oder}$$

$$r^2 + 2r^2\varepsilon = (\Delta x)^2 + 2\Delta x\,\Delta\xi + (\Delta y)^2 + 2\Delta y\,\Delta\eta + (\Delta z)^2 = r^2 + 2\Delta x\,\Delta\xi + 2\Delta y\,\Delta\eta,$$

folglich

$$\varepsilon = \frac{\Delta x\,\Delta\xi + \Delta y\,\Delta\eta}{r^2} = \frac{\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta}{r}. \quad (3)$$

Ferner

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= \frac{\Delta x + \Delta\xi}{r(1+\varepsilon)} = \frac{\Delta x + \Delta\xi}{r}(1-\varepsilon) = \frac{r\cos\alpha + \Delta\xi}{r}(1-\varepsilon),\\
\cos B &= \frac{\Delta y + \Delta\eta}{r(1+\varepsilon)} = \frac{\Delta y + \Delta\eta}{r}(1-\varepsilon) = \frac{r\cos\beta + \Delta\eta}{r}(1-\varepsilon),\\
\cos\Gamma &= \frac{\Delta z}{r(1+\varepsilon)} = \frac{\Delta z}{r}(1-\varepsilon) = \frac{r\cos\gamma}{r}(1-\varepsilon).
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Durch Substitution der Gleichungen (3) und (4) in die Gleichungen (2) geben die letztern die Wirkung von m auf $\mathfrak{m}$

$$\text{nach } x = \mathfrak{m}\,m\,f[r(1+\varepsilon)]\,\frac{r\cos\alpha + \Delta\xi}{r}(1-\varepsilon)$$

$$= \mathfrak{m}\,m\,[f(r) + r\varepsilon f'(r)]\,\frac{r\cos\alpha + \Delta\xi}{r}(1-\varepsilon),$$

$$\text{wo } f'(r) = \frac{df(r)}{dr} \text{ ist,}$$

$$= \mathfrak{m}\,m\left[f(r)\cos\alpha + f(r)\frac{\Delta\xi}{r} + \varepsilon[rf'(r) - f(r)]\frac{r\cos\alpha + \Delta\xi}{r}\right]$$

$$= \mathfrak{m}\,m\left[f(r)\cos\alpha + f(r)\frac{\Delta\xi}{r} + [rf'(r) - f(r)]\frac{\cos^2\alpha\,\Delta\xi + \cos\alpha\cos\beta\,\Delta\eta}{r}\right]$$

$$= \mathfrak{m}\,m\left[f(r)\cos\alpha + \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\Delta\xi + \frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\Delta\eta\right],$$

wenn man der Kürze wegen $rf'(r) - f(r) = \mathfrak{F}(r)$ setzt.

Auf ähnliche Weise stellt sich die Wirkung

$$\text{nach } y = \mathfrak{m}\,m\left[f(r)\cos\beta + \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r)\cos^2\beta}{r}\Delta\eta + \frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\Delta\xi\right],$$

$$\text{und nach } z = \mathfrak{m}\,m\left[f(r)\cos\gamma + \frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\gamma}{r}\Delta\xi + \frac{\mathfrak{F}(r)\cos\beta\cos\gamma}{r}\Delta\eta\right].$$

Die beschleunigende Kraft, welche von allen Theilchen m, m', m'' .... aus das Theilchen $\mathfrak{m}$ in Bewegung setzt, ist hiernach mit Uebergehung von

$$S[mf(r)\cos\alpha] = 0, \quad S[mf(r)\cos\beta] = 0, \quad S[mf(r)\cos\gamma] = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{nach } x &= S\left[m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\,\varDelta\xi\right]+S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\eta\right],\\
\text{nach } y &= S\left[m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\beta}{r}\,\varDelta\eta\right]+S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\xi\right],\\
\text{nach } z &= S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\gamma}{r}\,\varDelta\xi\right]+S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\beta\cos\gamma}{r}\,\varDelta\eta\right];
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

und somit entstehen nach den aus der Mechanik bekannten Sätzen für die Bewegung von $\mathfrak{m}$ die Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= S\left[m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\,\varDelta\xi\right]+S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\eta\right],\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= S\left[m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\beta}{r}\,\varDelta\eta\right]+S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\xi\right],\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\gamma}{r}\,\varDelta\xi\right]+S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\beta\cos\gamma}{r}\,\varDelta\eta\right].
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Doch nach der obigen Annahme soll keine Bewegung des Theilchens $\mathfrak{m}$ nach z vorkommen, daher muſs

$$S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\gamma}{r}\,\varDelta\xi\right]=0 \quad\text{und}\quad S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\beta\cos\gamma}{r}\,\varDelta\eta\right]=0$$

sein. Ferner sollen die beiden Bewegungen nach x und y von einander unabhängig bleiben; es befindet sich auch in der That, wenn man zunächst nur auf die Bewegung nach x sieht, zu jedem Theilchen, dessen Coordinaten $x+\varDelta x,\ y+\varDelta y,\ z+\varDelta z$ sind, auf der anderen Seite ein anderes Theilchen, dessen Coordinaten $x+\varDelta x,\ y-\varDelta y,\ z+\varDelta z$ sind, oder für welche $\cos\alpha=\cos\alpha$ und $\cos\beta=-\cos\beta$ ist; beide Theilchen gerathen ferner, sofern sich $\mathfrak{m}$ in der Mitte der Schwingung befindet, in ganz gleiche Bewegungen $\eta+\varDelta\eta$, also kommen in der Summe $S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\eta\right]$ immer paarweise zwei Theilchen vor, die die Glieder $m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\eta$ und $-m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\eta$ liefern und dadurch die ganze Summe gleich Null machen. Dieselbe Bewandtniſs hat es mit dem Gliede $S\left[m\,\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\,\varDelta\xi\right]$. Hierdurch gehen die Formeln (6) in die einfachern, und sofern nur nach z keine Schwingung erfolgt, immer noch allgemeinen über:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= S\left[m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\,\varDelta\xi\right],\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= S\left[m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\beta}{r}\,\varDelta\eta\right].
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Bei der Integration dieser Gleichungen muſs man von denjenigen Verhältnissen ausgehen, welche auf dieselben geführt haben. Es war aber nach dem Vorigen die Annahme, daſs die Aethertheilchen in regelmäſsige Schwingungen versetzt sind, welche einen fortlaufenden Strahl nach z bedingen; während also jedes Theilchen in gleichen Zeitabschnitten gleichmäſsig wiederholte Schwingungen vollendet, wiederholen sich auch in gleichen Abschnitten von z gleiche periodische Schwingungen, oder mit andern Worten es zertheilt sich die Bewegung des Aethers längs z in gleich weit von einander abstehende Wellen. Daraus folgt die übrigens auch den Formeln (7) vollkommen entspre-

chende Form der Gleichungen für ξ und η, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \Sigma A \sin kz + \Sigma B \cos kz,\\ \eta &= \Sigma C \sin kz + \Sigma D \cos kz;\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

in diesen Formeln bezeichnet Σ die Summe der von den Anziehungen der einzelnen Theilchen ausgehenden ähnlichen Schwingungen von m; A, B, C, D sind Functionen von t und Constanten, k endlich besitzt den Werth $\frac{2\pi}{l}$, wenn π das Verhältnifs des Durchmessers zum Umfange des Kreises und l die Länge der einzelnen Wellen bedeutet. Nun ist nach (8)

$$\begin{aligned}\xi + \Delta\xi &= \Sigma A \sin(kz + k\Delta z) + \Sigma B \cos(kz + k\Delta z)\\ &= \Sigma A \sin kz \cos k\Delta z + \Sigma A \cos kz \sin k\Delta z\\ &\quad + \Sigma B \cos kz \cos k\Delta z - \Sigma B \sin kz \sin k\Delta z,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= -\Sigma[(A \sin kz + B \cos kz)(1 - \cos k\Delta z)]\\ &\quad + \Sigma[(A \cos kz - B \sin kz) \sin k\Delta z].\end{aligned}$$

In $\Sigma[(A \cos \varkappa z - B \sin kz) \sin k\Delta z]$ kommen jedoch immer paarweise zwei Glieder vor, denen Δz und $-\Delta z$ oder $\sin k\Delta z$ und $-\sin k\Delta z$ entspricht, diese Glieder heben sich gegenseitig auf; daher ist

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi &= -\Sigma[(A \sin kz + B \cos kz)(1 - \cos k\Delta z)],\\ &= -2\Sigma\left[(A \sin kz + B \cos kz) \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$\eta + \Delta\eta = \Sigma C \sin(kz + k\Delta z) + \Sigma D \cos(kz + k\Delta z), \text{ und}$$

$$\Delta\eta = -2\Sigma\left[(C \sin kz + D \cos kz) \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right]. \quad (10)$$

Diese Werthe von $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ aus (9) und (10) sind in die Gleichungen (7) zu substituiren. Man nehme zunächst aus (8) nur ein einzelnes Paar der Glieder, denen Δz und $-\Delta z$ zukommt, so ist

$$\begin{aligned}\xi &= A \sin kz + B \cos kz,\\ \eta &= C \sin kz + D \cos kz, \text{ und}\\ \Delta\xi &= -2(A \sin kz + B \cos kz) \sin^2 \frac{k\Delta z}{2} = -2\xi \sin^2 \frac{k\Delta z}{2},\\ \Delta\eta &= -2(C \sin kz + D \cos kz) \sin^2 \frac{k\Delta z}{2} = -2\eta \sin^2 \frac{k\Delta z}{2},\end{aligned}$$

diese Werthe in die Gleichungen (7) gesetzt, geben

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2\xi\, S\left[m \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r) \cos^2\alpha}{r} \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right],\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\eta\, S\left[m \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r) \cos^2\beta}{r} \sin^2 \frac{\Delta kz}{2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Es sei nun der Kürze halber $2S\left[m \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r) \cos^2\alpha}{r} \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right] = s^2$ und $2S\left[m \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r) \cos^2\beta}{r} \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right]$ ebenfalls $= s^2$, da bei gleicher Vertheilung des Aethers nach

allen Seiten die beiden Summen einander gleich sind, so ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -s^2\xi,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -s^2\eta;\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}\xi &= E\sin st + F\cos st,\ \text{und}\\ \eta &= G\sin st + H\cos st;\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

E, F, G, H sind Constanten und Functionen von z, die eingeführte Gröfse s aber ist $= \frac{2\pi}{T}$, wo T die Zeitdauer einer Schwingung ausdrückt; denn auch der Zeit nach müssen die Schwingungen periodisch sein. Die Gleichungen (13) und (8) bestehen zusammen, daher erhält man

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \mathfrak{A}[\mathfrak{a}\sin st + \mathfrak{b}\cos st][\mathfrak{c}\sin kz + \mathfrak{d}\cos kz],\\ \eta &= \mathfrak{B}[\mathfrak{e}\sin st + \mathfrak{f}\cos st][\mathfrak{g}\sin kz + \mathfrak{h}\cos kz],\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

worin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ neue Constanten sind. Zieht man noch die sämmtlichen von allen Aethertheilchen berührenden Schwingungen zusammen, so findet man nach der frühern Bezeichnung:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \Sigma\mathfrak{A}[\mathfrak{a}\sin st + \mathfrak{b}\cos st][\mathfrak{c}\sin st + \mathfrak{d}\cos st],\\ \eta &= \Sigma\mathfrak{B}[\mathfrak{e}\sin st + \mathfrak{f}\cos st][\mathfrak{g}\sin st + \mathfrak{h}\cos st].\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

In diesem Ausdrucke umschliefsen die Summenzeichen die Reihe der einzelnen Partialschwingungen, welche sich zu einer Gesammtschwingung zusammensetzen. Sobald man nur die letztere im Auge hat, kann man die Summenzeichen Σ ohne der Allgemeinheit der Formeln zu nahe zu treten, mit Fug und Recht übergehen. — Die allgemeine Form der Gleichungen für ξ und η enthält zuerst die durch $2S\left[m\,\frac{f(r) + \mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\sin^2\frac{k\Delta z}{k}\right] = s^2$ gegebene Relation zwischen s und k oder zwischen $\frac{2\pi}{T}$ und $\frac{2\pi}{l}$, über welche wir späterhin §. IV. ausführlicher handeln, sie läfst ferner, wenn die Constanten bekannt sind, die Schwingungsweite ξ oder η jedes Aethertheilchens an einem gegebenen Orte und zu einer gegebenen Zeit berechnen. In den folgenden Untersuchungen kommt aber fast ausschliefslich der Umstand vor, dafs man entweder die Schwingungsweite desselben Aethertheilchens zu beliebigen Zeiten, oder umgekehrt für dieselbe Zeit die Schwingungsweite verschiedener in der Richtung des Strahls gelegenen Aethertheilchen erfahren will; in diesen beiden Fällen ist die eine der beiden Gröfsen z oder t constant und nur die andere bleibt veränderlich. Hat man sich daher über die Verhältnisse verständigt, welche mit dem constanten Werthe der Gröfse z oder t verbunden sind, so darf man für die berührten Fälle den Gleichungen (14) die Form geben:

$$\xi = A\sin\frac{2\pi t}{T} + A'\cos\frac{2\pi t}{T},\ \text{oder}$$

$$\xi = A\sin\frac{2\pi z}{l} + A'\cos\frac{2\pi z}{l};$$

ebenso

$$\eta = B\sin\frac{2\pi t}{T} + B'\cos\frac{2\pi t}{T},\ \text{oder}$$

$$\eta = B\sin\frac{2\pi z}{l} + B'\cos\frac{2\pi z}{l}.$$

Nimmt man noch $\xi = 0$ bei $t = 0$ und $\xi = 0$ bei $z = 0$ und dasselbe für η an, so genügen selbst die einfachen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= A \sin\frac{2\pi t}{T}, \quad \text{oder} \quad \xi = A \sin\frac{2\pi z}{l}, \\ \eta &= B \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \text{oder} \quad \eta = B \sin\frac{2\pi z}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die constanten Werthe A und B geben die gröfsten Schwingungsweiten, zu welchen das untersuchte Theilchen gelangen kann.

§. II.

Zusammensetzung der Lichtstrahlen.

In einem einzelnen Lichtstrahle, für welchen an demselben Orte die Gleichungen

$$\xi = A \sin\frac{2\pi t}{T},$$

$$\eta = B \sin\frac{2\pi t}{T},$$

und zu derselben Zeit die Gleichungen

$$\xi = A \sin\frac{2\pi z}{l},$$

$$\eta = B \sin\frac{2\pi z}{l}$$

gehören, sind A und B, wie vorher gesagt ist, die Schwingungsweiten, zu welchen die Theilchen nach den beiden zu einander rechtwinkligen Richtungen gelangen. Wird das Auge von einem solchen Lichtstrahle getroffen, so empfindet es die Intensität desselben, grade wie es in ähnlichen Fällen mit dem Eindrucke auf widerstrebende Mittel der Fall ist, im Quadrate der Schnelligkeit, mit welcher die Aethertheilchen schwingen, multiplicirt mit der Masse derselben, also eine Intensität =

$$\begin{aligned} I &= M\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + M\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 \\ &= M\left(\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 \left[A^2 + B^2\right]. \end{aligned}$$

Der Factor $M\left(\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2$ oder vielmehr die Summe dieser Factoren durch alle Stadien einer Lichtwelle hindurch ist in demselben Medium immer derselbe; wird er $= 1$ gesetzt, so folgt:

$$I = A^2 + B^2, \quad (1)$$

oder bei polarisirtem Lichte, in welchem nur nach einer Seite nach x oder y Schwingungen statt finden,

$$I = A^2 \quad \text{oder} \quad I = B^2. \quad (2)$$

Man sieht hieraus, dafs die relative Intensität eines Lichtstrahles dem Quadrate der Schwingungsweite der einzelnen Aethertheilchen gleich ist.

Treffen zwei oder mehere Lichtstrahlen in ein und derselben Stelle des Aethers zusammen, so können sie entweder als einzelne Theile zu demselben gröfsern Wellensysteme gehören, oder nicht; im letztern Falle bleiben sie getrennt von einander und sind besonders zu berechnen, da die ursprüngliche Formel für die Schwingung der Aethertheilchen die Summe vieler zu einer Totalschwingung vereinigten einzelnen Schwingungen einschliefst, und sich also nur dann ein correspondirendes Ineinandergreifen zweier oder meherer Lichtstrahlen verbürgen läfst, wenn sie sich um ihrer Zusammengehörigkeit willen zu einem gemeinsamen Wellensysteme entsprechen. Unter dieser Bedingung bilden zwei oder mehere Lichtstrahlen an der in Betracht gezogenen Stelle einen Strahl, dessen Schwingungsweite und Intensität wir bestimmen können. Es seien zunächst nur zwei, und um nicht die doppelten Formeln zu haben, zwei nach derselben Richtung polarisirte Strahlen; der erste gelange an die betrachtete Stelle nach einem Wege $= z + z'$, der zweite nach einem Wege $= z + z''$, und zwar so, dafs sie sich in den Ausgangspuncten in einem gleichen Stadium der Schwingung befanden und auch an der Stelle zu gleicher Zeit eintreffen; dann sind die Gleichungen der beiden Strahlen

$$\xi' = A' \sin \frac{2\pi(z+z')}{l},$$

$$\xi'' = A'' \sin \frac{2\pi(z+z'')}{l},$$

und für den aus beiden gemeinsamen Strahl ist

$$\xi = \xi' + \xi'' = A' \sin \frac{2\pi(z+z')}{l} + A'' \sin \frac{2\pi(z+z'')}{l}$$

$$= \sin \frac{2\pi z}{l} \left[A' \cos \frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos \frac{2\pi z''}{l}\right]$$

$$+ \cos \frac{2\pi z}{l} \left[A' \sin \frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin \frac{2\pi z''}{l}\right],$$

Setzt man

$$A' \cos \frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos \frac{2\pi z''}{l} = \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi Z}{l}, \text{ und}$$

$$A' \sin \frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin \frac{2\pi z''}{l} = \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi Z}{l},$$

so folgt

$$\xi = \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi(z+Z)}{l},$$

und die Intensität dieses Strahles =

$$I = \mathfrak{A}^2 = \left[A' \cos \frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos \frac{2\pi z''}{l}\right]^2 + \left[A' \sin \frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin \frac{2\pi z''}{l}\right]^2.$$

Kommen drei Strahlen auf die genannte Weise zusammen, so seien ihre Gleichungen:

$$\xi' = A' \sin \frac{2\pi(z+z')}{l},$$

$$\xi'' = A'' \sin \frac{2\pi(z+z'')}{l},$$

$$\xi''' = A''' \sin \frac{2\pi(z+z''')}{l};$$

hieraus folgt die Gleichung des gemeinsamen Strahles:

$$\xi = \xi' + \xi'' + \xi''',$$

$$= A' \sin\frac{2\pi(z+z')}{l} + A'' \sin\frac{2\pi(z+z'')}{l} + A''' \sin\frac{2\pi(z+z''')}{l}$$

$$= \sin\frac{2\pi z}{l}\left[A' \cos\frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos\frac{2\pi z''}{l} + A''' \cos\frac{2\pi z'''}{l}\right]$$

$$+ \cos\frac{2\pi z}{l}\left[A' \sin\frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin\frac{2\pi z''}{l} + A''' \sin\frac{2\pi z'''}{l}\right].$$

Ist wiederum

$$A' \cos\frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos\frac{2\pi z''}{l} + A''' \cos\frac{2\pi z'''}{l} = \mathfrak{A} \cos\frac{2\pi Z}{l}, \text{ und}$$

$$A' \sin\frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin\frac{2\pi z''}{l} + A''' \sin\frac{2\pi z'''}{l} = \mathfrak{A} \sin\frac{2\pi Z}{l},$$

so ist

$$\xi = \mathfrak{A} \sin\frac{2\pi(z+Z)}{l},$$

und

$$I = \mathfrak{A}^2 = \left[A' \cos\frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos\frac{2\pi z''}{l} + A''' \cos\frac{2\pi z'''}{l}\right]^2$$

$$+ \left[A' \sin\frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin\frac{2\pi z''}{l} + A''' \sin\frac{2\pi z'''}{l}\right]^2.$$

Durch weitere Fortsetzung dieser Berechnungen überzeugt man sich leicht, dafs allgemein für den aus vielen correspondirenden Strahlen zusammengesetzten gemeinsamen Strahl die Gleichung gilt:

$$\xi = \mathfrak{A} \sin\frac{2\pi(z+Z)}{l}, \quad (3)$$

und für seine Intensität:

$$I = \mathfrak{A}^2 = \left[\Sigma A \cos\frac{2\pi z}{l}\right]^2 + \left[\Sigma A \sin\frac{2\pi z}{l}\right]^2, \quad (4)$$

wenn auch hier nach der frühern Bezeichnungsweise

$$\Sigma A \cos\frac{2\pi z}{l} = A' \cos\frac{2\pi z'}{l} + A'' \cos\frac{2\pi z''}{l} + A''' \cos\frac{2\pi z'''}{l} + \ldots \text{ und}$$

$$\Sigma A \sin\frac{2\pi z}{l} = A' \sin\frac{2\pi z'}{l} + A'' \sin\frac{2\pi z''}{l} + A''' \sin\frac{2\pi z'''}{l} + \ldots \text{ ist.}$$

Zur Bestimmung von Z hat man

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi Z}{l} = \frac{\Sigma A \sin\frac{2\pi z}{l}}{\Sigma A \cos\frac{2\pi z}{l}}. \quad (5)$$

Wir liefsen es bei dieser Untersuchung unerklärt, woher die angenommene Differenz in den Wegen für die einzelnen Theile eines gemeinsamen Wellensystemes stamme. Es bedeute also, um dies nachzuholen, ab (Fig. 1.) eine Strecke des Aethers, an welcher zu einer bestimmten Zeit ein zusammengehöriges Wellensystem grade sämmtliche Theilchen zu der gröfsten Schwingungsweite gebracht hat, oder mit andern Worten, es sei ab der zusammenhängende Berg eines Wellensystemes,

so ist eine Aetherstelle O zu derselben Zeit in einer Schwingung begriffen, welche aus den gemeinsamen Wirkungen der einzelnen Theile von ab, als A', A'', A'''.... und zwar nach den Entfernungen OA', OA'', OA'''.... hervorgebracht wird; hier findet demnach das Verhältnifs statt, welches wir oben voraussetzten. Es macht nun aber einen Unterschied, ob die Schwingungen in dem Wellensysteme längst ab oder senkrecht dazu erfolgen; denn findet das erstere statt, so mufs die Schwingung z. B. von A''', um senkrecht gegen die in Betracht kommende Richtung nach AO''' zu stehen, noch mit $\cos cde = \cos \alpha'''$ multiplicirt, das heifst, senkrecht gegen $A'''O$ zerlegt werden. Erfolgen dagegen die Schwingungen senkrecht gegen ab, so ist auch $A'''O$ senkrecht gegen dieselben und eine Zerlegung wird nicht nothwendig. Ein ähnlicher Umstand tritt bei O ein; verlangt man an dieser Stelle den Effect der gemeinsamen Schwingung nach OR, so mufs auch hier die längst fg parallel zu ed erfolgende Schwingung von A''' senkrecht auf OR zerlegt werden; der senkrecht zu fg polarisirte Strahl bleibt wiederum unberührt. Es würde nöthig sein, die angedeuteten Reductionen in der allgemeinen Formel (4) für die nach verschiedenen Richtungen polarisirten Strahlen, desgleichen für gewöhnliches Licht anzubringen, wenn nicht in allen Fällen, wo wir von der Formel Gebrauch machen werden, die Winkel, deren Cosinusse vorkommen, so klein wären, dafs die erforderlichen Correctionen mit dem gröfsten Rechte als unbedeutend für die Endresultate übergangen werden könnten.

§. III.

Von der Beugung des Lichtes.

A. Von der Beugung im Allgemeinen.

Die Lehre von der Zusammensetzung der Lichtstrahlen findet eine ihrer wichtigsten Anwendungen in den Untersuchungen über die sogenannte Beugung des Lichtes. So lange sich nämlich die Lichtstrahlen in demselben gleichförmig elastischen Medium von einem leuchtenden Puncte nach allen Seiten hin unbehindert verbreiten, so lange findet sich kein Grund, dafs sie nicht in gleichen Entfernungen vom leuchtenden Puncte eine gleiche Intensität besitzen sollten; sie erleidet nur nach dem Grundsatze von der Erhaltung der lebendigen Kräfte eine nach dem Quadrate der Entfernungen zunehmende Verminderung. Denn ist im Abstande r die Gleichung eines schwingenden Aethertheilchens:

$$\xi = a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

und im Abstande R:

$$\Xi = A \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so verhalten sich die Schnelligkeiten oder

$$\frac{d\xi}{dt} : \frac{d\Xi}{dt} = a : A,$$

die zu gleicher Zeit von der Schwingung bewegten, gleich dicken Massen wie die Oberflächen der zu r und R gehörigen Lichtkugeln, oder

$$m : M = 4r^2\pi : 4R^2\pi = r^2 : R^2;$$

also ist wegen der Erhaltung der lebendigen Kräfte

$$a^2 r^2 = A^2 R^2, \text{ oder}$$

$$a^2 : A^2 = R^2 : r^2,$$

das heifst, die Intensitäten $i = a^2$ und $I = A^2$ verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen vom leuchtenden Puncte.

Tritt dagegen der Fall ein, dafs ein dunkler Schirm einen Theil der Lichtstrahlen aufhält und nur dem andern einen freien Fortgang gestattet, so mufs man für jede Stelle der durch den Schirm gegangenen Strahlen die Intensität dadurch besonders berechnen, dafs man die Wirkungen von den einzelnen Theilen der freien Lichtwelle an der fraglichen Stelle zusammennimmt. Um die Begriffe fest zu stellen, sei $ABCD$ (Fig. 2.) der Durchschnitt des dunklen Schirmes, der die von L ausgehenden Lichtstrahlen nur durch die Spalte BC hindurchläfst. Achtet man allein auf die Strahlen, welche in der gezeichneten Durchschnittsebene liegen, so bleibt das Licht bis zum Bogen BC in seinem gewöhnlichen Zustande; hier wird der übrige Theil vom dunklen Schirme aufgefangen, und BC allein ist erzeugende Welle für die an den verschiedenen Stellen hinter dem Schirme resultirenden Intensitäten. Man zerlege nun BC in unendlich viele Theilchen a', a'' ...., lasse von jedem einen Strahl nach dem beliebig angenommenen Puncte O gelangen, und berechne die gemeinsame Intensität aller dieser Strahlen, welche die ungleichen Wege CO, $a'O$, $a''O$ .... BO zu durchlaufen haben, nach den im vorigen §. gegebenen Formeln. Die Berechnung wird lehren, dafs nicht, wie es bei unbehindertem Fortgange des Lichtes der Fall sein würde, in allen von L gleich weit abliegenden Puncten O, O', O'' .... eine gleiche, sondern vielmehr hier eine gröfsere, dort eine kleinere Intensität vorkommt, und dafs sich deshalb dem den ganzen Bogen PQ betrachtenden Auge eine Erscheinung von abwechselnd hellern und dunklern Stellen darbietet. Man belegt das Gebiet dieser Erscheinungen mit dem Namen der Beugungserscheinungen des Lichtes, weil man in den zuerst untersuchten Fällen eine Ablenkung der Lichtstrahlen von den Rändern des dunklen Schirmes wahrzunehmen glaubte. Bei einer schicklichen Wahl in den Oeffnungen des dunklen Schirmes und unter andern besonderen Bedingungen gehören diese Beugungserscheinungen zu den schönsten Bildern, die man durch den wechselseitigen Einflufs der Strahlen auf einander erreichen kann; sie sind überdies in vielen einzelnen Fällen mit der gröfsten Sorgfalt gemessen, und haben in der Undulationstheorie eine so genügende Erklärung gefunden, dafs man von Fresnel's Arbeit über diesen Gegenstand die Begründung dieser Theorie datiren kann. Diese Umstände nöthigen uns hier nach Gebühr zu verweilen, um wenigstens die Hauptphänomene vollständig durchzuführen. — Das Ganze der Beugungserscheinungen zerfällt sowohl für die Berechnung als auch für die Beobachtungsweise in drei besondere Theile. Der erste behandelt die Fälle, in welchen die Strahlen parallel zu einander auf den Schirm fallen und die Wirkung der hinter dem Schirme wiederum zu einander parallelen Strahlen gesucht wird, das heifst die Fälle, in welchen der leuchtende Punct sich in unendlicher Entfernung vorm Schirme befindet, und man die Erscheinungen gleichfalls in unendlicher Entfernung hinter dem Schirme betrachtet. Diesen Bedingungen zu entsprechen befestigt man den dunklen und mit den erforderlichen kleinern Oeffnungen versehenen Schirm vor dem Objectivglase eines Fernrohrs, läfst von einem sehr entfernten Lichtpuncte die fast parallelen Strahlen durch die Oeffnungen hindurchdringen, und vereinigt die zu einander parallel heraustretenden durch das Objectiv des Fernrohrs zu einem Bilde in der Blendung, welches man

durch das Ocularglas vergröſsert sieht. Ist nämlich das Fernrohr vorher für einen unendlich weit entfernten Gegenstand eingestellt worden, so vereinigt es bekanntlich die mit seiner Axe parallelen Strahlen in dem Durchschnitt der Axe mit der Blendung, welche vor dem Ocular das Gesichtsfeld begränzt, und ebenso die zu einer andern durch die Mitte des Objectivs gelegten Linie parallelen Strahlen an der Stelle der Blendung, auf welche die genannte Linie in ihrer Verlängerung hintrifft. Die hierher gehörigen Beugungserscheinungen sind unstreitig die zierlichsten; wir besitzen sorgfältige Messungen vor allen von Fraunhofer, und eine ausführliche nur etwas umständliche mathematische Entwicklung von Schwerd. — Der zweite Theil umfaſst die Beugungserscheinungen, bei welchen der Lichtpunct in einer beliebigen und daher in Rechnung gezogenen Entfernung vorm Schirme liegt, und wo man die resultirende Intensität von den convergirenden Strahlen, also die Erscheinungen in einer endlichen Entfernung hinter dem Schirme bestimmt. Zu den Hauptfällen hat Fresnel treffliche Messungen geliefert und sinnreich berechnet. — Der dritte Theil endlich bestimmt die Resultate aus den vom Schirme ab divergirenden Strahlen, und handelt von den gewissermaſsen geometrischen Erscheinungen vor dem Schirme; die hierher gehörigen Erscheinungen sind am meisten beschränkt und verdienen nur als Abschluſs für das ganze Gebiet eine kurze Erwähnung.

B. Beugungserscheinungen bei parallelen Strahlen vor und hinter dem Schirme.

1. Erscheinungen durch eine enge Spalte.

In dem Schirme, welcher vor das Objectivglas des Fernrohrs gesetzt wird, befinde sich eine enge Spalte von unbegränzter Länge und von einer Breite $= \gamma$. Auf dieselbe falle Licht von einem unendlich weit entfernten Puncte; es sei von einfacher Farbe, dessen Wellenlänge $= \lambda$ ist, und besitze auf einem der Spalte gleichen Raum eine Intensität $= A^2$. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, daſs die Ränder der Spalte in der Wellenebene der einfallenden Strahlen liegen und ebenso von den gebeugten nur diejenigen betrachten, die sich senkrecht gegen die Ränder weiter bewegen. Es bezeichne $AB = \gamma$ (Fig. 3.) den Durchschnitt der Spalte; CB ist die Richtung der einfallenden Strahlen und DB senkrecht zu BC die Richtung ihrer Wellenebene, welche mit BA den Winkel χ bildet. Man verlangt die resultirende Intensität der parallel zu BE gebeugten Strahlen, deren Wellenebene, AF im Durchschnitt, senkrecht zu BE ist, und mit AB den Winkel $BAF = \vartheta$ einschlieſst. Zuerst ist einleuchtend, daſs alle Strahlen, welche durch eine mit den Rändern der Spalte parallele Linie hindurchgehen, sich überall in demselben Stadium der Schwingung befinden, und daſs daher einer von ihnen, wenn man nur die Intensität aller übrigen auf ihn überträgt, die Stelle derselben vertreten kann. Setzt man diese stellvertretenden Strahlen in die Linie BD und verfolgt sie bis AB als einfallende Strahlen, da sie ungeachtet der schon vorher durch den Schirm unterbrochenen Welle doch nur eine höchst unbedeutende Veränderung in ihrer Intensität erlitten haben können, so läſst sich von der Linie AB ab die Intensität der gebeugten Strahlen nach den gewöhnlichen Regeln der Integration berechnen. Ein beliebiger Strahl durch M hat nämlich bei einer Breite $= dm$ und einer Intensität $= \left(\frac{A \cos\chi \, dm}{\gamma}\right)^2$ von der Wellenebene der einfallenden Strahlen bis zum Schirm einen Weg $= ML = MB \sin\chi = m \sin\chi$; und bis zur Wellenebene der gebeugten Strahlen noch einen Weg

$= MN = (\gamma - m)\sin\vartheta$, also zusammen einen Weg $= \gamma \sin\vartheta + m(\sin\chi - \sin\vartheta)$ zurückzulegen; hieraus folgt nach §. II. (4) die Intensität der parallel zu BE gebeugten Strahlen =

$$I = \left[\int \frac{A\cos\chi\, dm}{\gamma} \cos\frac{2\pi m(\sin\chi - \sin\vartheta)}{\lambda}\right]^2 + \left[\int \frac{A\cos\chi\, dm}{\gamma} \sin\frac{2\pi m(\sin\chi - \sin\vartheta)}{\lambda}\right]^2$$

integrirt von $m = 0$ bis $m = \gamma$. Also

$$I = \left[\frac{A\cos\chi}{\gamma} \cdot \frac{\sin[2\pi\gamma(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}]}{2\pi(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{A\cos\chi}{\gamma \cdot 2\pi(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}} - \frac{A\cos\chi}{\gamma} \cdot \frac{\cos[2\pi\gamma(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}]}{2\pi(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}}\right]^2$$

$$= \left(\frac{A\cos\chi}{2\pi\gamma(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}}\right)^2 \left[2 - 2\cos[2\pi\gamma(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}]\right]$$

$$= (A\cos\chi)^2 \left[\frac{\sin[\pi\gamma(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}]}{\pi\gamma(\sin\chi - \sin\vartheta)\lambda^{-1}}\right]^2. \quad (1)$$

Um nach dieser Formel die Gestaltung der Beugungserscheinung innerhalb der Blendung, oder im Gesichtsfelde des Fernrohrs zu übersehen, stehe zuerst der Schirm senkrecht auf der Axe des grade auf den leuchtenden Punct gerichteten Fernrohrs. In diesem Falle hat man $\chi = 0$, also geht die Formel über in die einfachere:

$$I = A^2 \left[\frac{\sin[\pi\gamma\sin\vartheta\lambda^{-1}]}{\pi\gamma\sin\vartheta\lambda^{-1}}\right]^2. \quad (2)$$

Wie sogleich in die Augen fällt, wird die Intensität die gröfste $= A^2$, wenn $\frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda} = 0$ oder $\sin\vartheta = 0$ ist; daher geht mitten durch die Blendung der Spalte parallel ein lichter Streif. Ferner ist $I = 0$, wenn man aufser dem obengenannten Fall $\sin\frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda} = 0$ hat, also bei

$$\frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda} = \pm\pi = \pm 2\pi = \pm 3\pi = \ldots \text{ oder bei}$$

$$\sin\vartheta = \pm\frac{\lambda}{\gamma} = \pm\frac{2\lambda}{\gamma} = \pm\frac{3\lambda}{\gamma} = \ldots \quad (3)$$

Setzt man nun den Abstand der Blendung von dem Objectivglase $= L$, vertauscht, wie es bei kleinen Winkeln ohne Fehler erlaubt ist, $L\sin\vartheta$ mit $L\tang\vartheta$, so messen die Abstände $\pm\frac{L\lambda}{\gamma}$, $\pm\frac{2L\lambda}{\gamma}$, $\pm\frac{3L\lambda}{\gamma}$ .... zu beiden Seiten des vorhin erwähnten lichten Streifens absolut dunkle Linien ab, welche quer durch die Blendung parallel zu der Spalte hindurchgehen. Nach der Mitte der durch je zwei von diesen Linien gebildeten Streifen nimmt das Licht allmählig an Intensität zu, und erreicht sein Maximum an einer Stelle, die man aus der Gleichung $\frac{dI}{d\vartheta} = 0$ findet. Aber

$$\frac{dI}{d\vartheta} = 0 = d \cdot \frac{\sin[\pi\gamma\sin\vartheta\lambda^{-1}]}{\pi\gamma\sin\vartheta\lambda^{-1}}$$

$$= \frac{\pi\gamma\cos\vartheta\lambda^{-1}}{\pi\gamma\sin\vartheta\lambda^{-1}}\cos\frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda} - \frac{\pi\gamma\cos\vartheta\lambda^{-1}}{[\pi\gamma\sin\vartheta\lambda^{-1}]^2}\sin\frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda}.$$

Daher liegen die Oerter der Maxima in der Gleichung

$$\tang\frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda} = \frac{\pi\gamma\sin\vartheta}{\lambda}. \quad (4)$$

Die trigonometrischen Tafeln führen leicht auf die hierher gehörigen Werthe von $\frac{\pi\gamma \sin\vartheta}{\lambda}$, und die vollständige Formel (2) liefert die resultirenden und wie man aus der folgenden Tafel sieht mit der Entfernung von der Mitte ziemlich schnell abnehmenden Intensitäten.

Tafel der Maxima.

	$\frac{\pi\gamma \sin\vartheta}{\lambda}$		Intens. des Maximums.
1 Max.	0°	0′	1,000000 A^2
2 Max.	257	27	0,047191 A^2
3 Max.	442	37	0,016480 A^2
4 Max.	624	46	0,008342 A^2
5 Max.	805	56	0,005029 A^2
6 Max.	986	40	0,003259 A^2
7 Max.	1167	12	0,002403 A^2
8 Max.	1347	34	0,001805 A^2

Im Allgemeinen betrachtet nehmen die von zwei absolut dunklen Linien eingeschlossenen Streifen an Breite zu, wenn λ gröfser und γ kleiner wird; man hat daher im rothen Lichte unter übrigens gleichen Umständen die deutlichsten Bilder, desgleichen bei schmalen Oeffnungen; doch müssen die letztern füglich eine gewisse Breite behalten, wenn man mehere Streifen zugleich im Gesichtsfelde des Fernrohrs haben will. Dafs übrigens ein weitsichtiges Auge bisweilen die Stelle des Fernrohrs vertreten kann, versteht sich nach der Einrichtung des Auges fast von selbst. — Wendet man weifses oder ein aus den verschiedenen Farben des Sonnenspectrums zusammengesetztes Licht an, so liefern die einzelnen Farbestrahlen ihren Wellenlängen entsprechende, ungleich breite Streifen, zunehmend vom Violett zum Roth. Diese Streifen decken sich und geben durch die Mischung der Farben auf einander folgende, mehr oder minder ausgebildete Spectra, in denen man die dunkelsten Stellen nach der mittlern, der dem weifsen Lichte zukommenden Wellenlänge berechnet. Bei Fraunhofer heifsen sie Spectra der ersten Klasse.

Um die Winkel ϑ für die Oerter der Minima, denn diese gestatten ein sicheres Einstellen als die Maxima, mittelst eines Theodolithen zu messen, stecke man den Schirm senkrecht auf die Axe des Fernrohrs und stelle es zuerst so auf den Lichtpunct ein, dafs der lichte Streif in die Mitte des Gesichtsfeldes fällt. Hierauf lenke man das Fernrohr seitwärts und bemerke die Winkel, unter denen nach und nach die dunkelsten Stellen der einfarbigen Streifen oder der Spectra in die Mitte des Gesichtsfeldes kommen. Wären die einfallenden Lichstrahlen vollkommen parallel zu einander, so würden die gemessenen Winkel $= \chi$ bei $\vartheta = 0$ sein; ist aber, wie wohl gewöhnlich, der Lichtpunct noch in mefsbarer Entfernung vom Fernrohr, so mufs man durch eine leicht zu findende, freilich meist unbedeutende Correction den Winkel χ berichtigen. Die Formel

$$I = (A \cos\chi)^2 \left[\frac{\sin\left[\pi\gamma \sin\chi\, \lambda^{-1}\right]}{\pi\gamma \sin\chi\, \lambda^{-1}}\right]^2 \quad (5)$$

giebt die Minima bei $\sin\frac{\pi\gamma \sin\chi}{\lambda} = 0$, dieselben Werthe, die vorhin für ϑ bei $\chi = 0$ galten. Auch

die Maxima erfahren durch den Uebergang von A^2 in $A^2 \cos^2 \chi$ nur eine so unbedeutende Veränderung, dafs man sie billig vernachlässigen kann. Die Messungen dienen einmal dazu, die Resultate der Theorie zu bestätigen, zweitens bieten sie ein Mittel dar, die Wellenlängen der einzelnen Strahlen des Spectrums auf befriedigende Weise zu bestimmen. Zur Uebersicht wähle ich einige von Fraunhofers Messungen am weifsen Lichte, dessen Wellenlänge $= \lambda = 0{,}0000211$ par. Zoll ist.

γ par. Z.	1 Min. χ beob.	1 Min. χ berechn.	2 Min. χ beob.	2 Min. χ berechn.	3 Min. χ beob.	3 Min. χ berechn.	4 Min. χ beob.	4 Min. χ berechn.
0,11545	37″,6	37″,7	1′ 15″,5	1′ 15″,6	1′ 53″	1′ 53″,2		
0,06098	1′ 11, 6	1′ 11, 4	2 22, 7	2 22, 7	3 31, 7	3 34, 1	4′ 44″,7	4′ 45″,5
0,01237	5 48, 5	5 51, 8	11 38	11 43, 6	17 26, 5	17 35, 5	23 14, 7	23 27, 3
0,00642	11 11	11 17, 7	22 18	22 35, 9	33 43	33 53, 7	44 58	45 11, 7
0,00308	23 31	23 33	47 6	47 6, 3	1° 10′ 43″	1° 10′ 39″,4		
0,00114	1° 4′ 53″	1° 3′ 37″,9						

Im allgemeinsten Falle endlich, wo keiner der beiden Winkel χ oder ϑ gleich Null ist, kommt die vollständige Formel (4) in Anwendung. Nach ihr fallen die Minima wenn

$$\frac{\pi \gamma (\sin \chi - \sin \vartheta)}{\lambda} = \pm \pi = \pm 2\pi = \pm 3\pi = \ldots \text{ ist.}$$

Dies giebt

$$\sin \chi - \sin \vartheta = \pm \frac{\lambda}{\gamma} = \pm \frac{2\lambda}{\gamma} = \pm \frac{3\lambda}{\gamma} = \ldots$$

Hat χ einen constanten Werth, d. h. bleibt die Neigung der Schirmfläche gegen die einfallenden Strahlen dieselbe, so erhält man

$$\sin \vartheta = \sin \chi \mp \frac{\lambda}{\gamma} = \sin \chi \mp \frac{2\lambda}{\gamma} = \ldots$$

Nach dieser Gleichung ist die Vertheilung der Spectra zu beiden Seiten der zur Schirmfläche Normalen nicht mehr gleich, sie wird vielmehr um desto ungleicher, je kleiner γ oder je gröfser der Werth von $\frac{\lambda}{\gamma}$ ausfällt. Geht man indefs von der Richtung der einfallenden Strahlen als Mittellinie aus und trennt ϑ in $\chi + \vartheta_0$, von denen ϑ_0 nur zu einem so kleinen positiven oder negativen Werthe gelangt, dafs $\cos \vartheta_0 = 1$ genommen werden darf, so wird

$$\sin \vartheta_0 = \pm \frac{\lambda}{\gamma \cos \chi} = \pm \frac{2\lambda}{\gamma \cos \chi} = \pm \frac{3\lambda}{\gamma \cos \chi} = \ldots,$$

und die Vertheilung der Streifen erhält dieselbe Form, als wenn die Schirmfläche auf die Richtung der einfallenden Strahlen senkrecht gesetzt und die Spalte im Verhältnisse von γ zu $\gamma \cos \chi$ verringert oder, was dasselbe ist, die Breite ihrer Projection auf die einfallende Wellenebene in Rechnung genommen würde.

2. Erscheinungen durch ein Paralleltrapez.

Es befinde sich im Schirme das Paralleltrapez $ABCD$ (Fig. 4.), dessen parallele Seiten $AB = a$ und $CD = d$ sind. Auf die beliebig angenommene Wellenebene der einfallenden Strahlen einfarbigen Lichtes fälle man von A, B, C, D Perpendikel $= p_1, p_2, p_3, p_4$; ebenso fälle man von denselben Puncten Perpendikel auf die Wellenebene der in Untersuchung kommenden gebeugten

Strahlen und bezeichne sie der Reihe nach mit q_1, q_2, q_3, q_4. Grade wie bei der engen Spalte im vorigen Falle kann man auch hier, ohne sich durch die unbedeutende Aenderung der Intensität stören zu lassen, die einfallenden Strahlen bis zur Oeffnung verfolgen und sie von da ab als gebeugte nehmen, deren Intensität eben nach der durch die Perpendikel gegebenen Richtung gefunden werden soll. Ein beliebiger Strahl gehe durch G; man ziehe durch diesen Punct EF parallel und LH senkrecht zu a und d, setze $EF = f$, $FG = x$, $LH = h$ und $GH = y$, so steht F von der Wellenebene der einfallenden Strahlen um

$$\frac{(p_3 - p_1)y + p_1 h}{h}, \quad E \text{ um } \frac{(p_4 - p_2)y + p_2 h}{h},$$

folglich G um

$$\frac{[(p_4 - p_2)y + (p_2 - p_1)h - (p_3 - p_1)y]\,x}{hf} + \frac{(p_3 - p_1)y + p_1 h}{h}$$

$$= \frac{[(p_4 - p_3 - p_2 + p_1)y + (p_2 - p_1)h]\,x + (p_3 - p_1)yf + p_1 hf}{hf}$$

und nach derselben Weise von der Wellenebene der gebeugten Strahlen um

$$\frac{[(q_4 - q_3 - q_2 + q_1)y + (q_2 - q_1)h]\,x + (q_3 - q_1)yf + q_1 hf}{hf}$$

entfernt; also hat der Strahl durch G von einer Wellenebene zur andern überhaupt einen Weg $=$

$$\frac{[(P_4 - P_3 - P_2 + P_1)y + (P_2 - P_1)h]\,x + (P_3 - P_1)yf + P_1 hf}{hf}$$

zurückzulegen, wenn man der Kürze halber $p_1 + q_1 = P_1$, $p_2 + q_2 = P_2$, $p_3 + q_3 = P_3$ und $p_4 + q_4 = P_4$ setzt. Um diesen Ausdruck noch mehr zu vereinfachen, sei $P_4 - P_2 = U$, $P_3 - P_1 = V$, und $P_2 - P_1 = W$ und die Fläche des Paralleltrapezes $= Q$, so erhält man nach §. II. (4), wenn A^2 die Intensität der auffallenden Strahlen bedeutet, die Intensität der gebeugten $=$

$$I = \left[\iint \frac{A\,dx\,dy}{Q} \cos \frac{2\pi\{[(U - V)y + Wh]\,x + Vyf\}}{hf\lambda}\right]^2$$

$$+ \left[\iint \frac{A\,dx\,dy}{Q} \sin \frac{2\pi\{[(U - V)y + Wh]\,x + Vyf\}}{hf\lambda}\right]^2,$$

integrirt von $x = 0$ bis $x = f$, und von $y = 0$ bis $y = h$.

Es ist aber

$$\frac{A\,dy}{Q}\int dx \cos \frac{2\pi\{[(U - V)y + Wh]\,x + Vyf\}}{hf\lambda} =$$

$$\frac{A\,dy}{Q} \cdot \frac{hf\lambda}{2\pi[(U - V)y + Wh]} \cdot \left[\sin \frac{2\pi\{[(U - V)y + Wh]f + Vyf\}}{hf\lambda} - \sin \frac{2\pi Vyf}{hf\lambda}\right]$$

und

$$\frac{A\,dy}{Q}\int dx \sin \frac{2\pi\{[(U - V)y + Wh]\,x + Vyf\}}{hf\lambda} =$$

$$\frac{A\,dy}{Q} \cdot \frac{hf\lambda}{2\pi[(U - V)y + Wh]} \cdot \left[\cos \frac{2\pi Vyf}{hf\lambda} - \cos \frac{2\pi\{[(U - V)y + Wh]f + Vyf\}}{hf\lambda}\right],$$

also

$$I = \left[\int \frac{Ahf\lambda\, dy}{2\pi[(U-V)y+Wh]\,Q}\left(\sin\frac{2\pi(Uy+Wh)}{h\lambda} - \sin\frac{2\pi Vy}{h\lambda}\right)\right]^2 + \left[\int \frac{Ahf\lambda\, dy}{2\pi[(U-V)y+Wh]\,Q}\left(\cos\frac{2\pi Vy}{h\lambda} - \cos\frac{2\pi(Uy+Wh)}{h\lambda}\right)\right]^2.$$

Substituirt man für f seinen Werth $\frac{ah-(a-d)y}{h}$, und bedenkt, dafs wegen des Parallelismus von a und d

$$\frac{P_4-P_3}{d} = \frac{P_2-P_1}{a} \text{ oder } U-V = -\frac{(a-d)W}{a}, \text{ folglich } \frac{ah-(a-d)y}{(U-V)y+Wh} = \frac{a}{W}$$

ist, so geht die Gleichung für I über in;

$$I = \left[\int \frac{A\lambda a\, dy}{2\pi WQ}\left\{\sin\frac{2\pi(Uy+Wh)}{h\lambda} - \sin\frac{2\pi Vy}{h\lambda}\right\}\right]^2 + \left[\int \frac{A\lambda a\, dy}{2\pi WQ}\left\{\cos\frac{2\pi Vy}{h\lambda} - \cos\frac{2\pi(Uy+Wh)}{h\lambda}\right\}\right]^2$$

$$= \left(\frac{A\lambda a}{2\pi WQ}\right)^2 \left[\left\{\frac{h\lambda}{2\pi U}\left(\cos\frac{2\pi W}{\lambda} - \cos\frac{2\pi(U+W)}{\lambda}\right) - \frac{h\lambda}{2\pi V}\left(1-\cos\frac{2\pi V}{\lambda}\right)\right\}^2 + \left\{\frac{h\lambda}{2\pi V}\sin\frac{2\pi V}{\lambda} - \frac{h\lambda}{2\pi U}\left(\sin\frac{2\pi(U+W)}{\lambda} - \sin\frac{2\pi W}{\lambda}\right)\right\}^2\right]$$

$$= \left(\frac{A\lambda a}{2\pi WQ}\right)^2 \left[\left\{\frac{h\lambda}{\pi U}\sin\frac{\pi(U+2W)}{\lambda}\sin\frac{\pi U}{\lambda} - \frac{h\lambda}{\pi V}\sin^2\frac{\pi V}{\lambda}\right\}^2 + \left\{\frac{h\lambda}{\pi V}\sin\frac{\pi V}{\lambda}\cos\frac{\pi V}{\lambda} - \frac{h\lambda}{\pi U}\cos\frac{\pi(U+2W)}{\lambda}\sin\frac{\pi U}{\lambda}\right\}^2\right]$$

$$= \left(\frac{A\lambda a}{2\pi WQ}\right)^2 \left[\frac{h^2\lambda^2}{\pi^2 U^2}\sin^2\frac{\pi U}{\lambda} + \frac{h^2\lambda^2}{\pi^2 V^2}\sin^2\frac{\pi V}{\lambda} - 2\frac{h^2\lambda^2}{\pi^2 UV}\sin\frac{\pi U}{\lambda}\sin\frac{\pi V}{\lambda}\cos\frac{\pi(U-V+2W)}{\lambda}\right].$$

Man setze für Q seinen Werth $\frac{a+d}{2}h$, für $\frac{(a+d)W}{a}$ seinen Werth $U-V+2W$, substituire P_4-P_2 für U, P_3-P_1 für V und $P_4-P_3+P_2-P_1$ für $U-V+2W$, so nimmt die vorhergehende Gleichung die Form an:

$$I = \left(\frac{A\lambda}{\pi(P_4-P_3+P_2-P_1)}\right)^2 \left\{\frac{\lambda^2}{\pi^2(P_4-P_2)^2}\sin^2\frac{\pi(P_4-P_2)}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{\pi^2(P_3-P_1)^2}\sin^2\frac{\pi(P_3-P_1)}{\lambda} - 2\frac{\lambda^2}{\pi^2(P_4-P_2)(P_3-P_1)}\sin\frac{\pi(P_4-P_2)}{\lambda}\sin\frac{\pi(P_3-P_1)}{\lambda}\cos\frac{\pi(P_4-P_3+P_2-P_1)}{\lambda}\right\}. \quad (6)$$

Hierdurch ist die Intensität der gebeugten Strahlen nach jeder Richtung und unter jedem Neigungswinkel vollkommen bestimmt. Sollte man übrigens, wie früher, die Intensität der auf das Paralleltrapez senkrecht auffallenden Strahlen $= A^2$ setzen wollen, so ist A in der Formel noch mit dem Cosinus der Neigung der Schirmfläche zur Wellenebene der einfallenden Strahlen zu multipliciren, eine für die gewöhnlichen Beobachtungen unbedeutende Correction.

3. Erscheinungen durch ein Parallelogramm.

Die Beugungserscheinungen durch ein Paralleltrapez sind unregelmäfsig, wir beschränken daher bei der nähern Anwendung den allgemeinen Fall auf den speciellen, dafs die Oeffnung im Schirme ein Parallelogramm ist. Dies Parallelogramm sei $ABCD$ (Fig. 4.), und der Schirm stehe senkrecht gegen die Axe des Fernrohrs, welches man gerade auf den Lichtpunct gerichtet hat, so dafs die Strahlen senkrecht durch die Oeffnung fallen. Unter dieser Bedingung ist $p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = 0$, und $P_4 = q_4$, $P_3 = q_3$, $P_2 = q_2$, $P_1 = q_1$. Vom Mittelpuncte O des Parallelogramms ziehe man OX parallel zu CD, OY unter einem beliebigen Winkel x gegen OX, und bestimme die Beugungserscheinungen, wie sie nach der Linie OY statt finden. Hierzu sei FG senkrecht auf OY, $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ senkrecht auf FG, ferner $AC = a$, $AB = b$, $\angle BAC = \nu$, und ϑ bezeichne den Neigungswinkel der Wellenebene der gebeugten Strahlen gegen OY, so erhält man

$$D\delta = \frac{b\cos x + a\cos(\nu + x)}{2}, \qquad B\beta = \frac{b\cos x - a\cos(\nu + x)}{2},$$

folglich

$$q_4 = -q_1 = \frac{b\cos x + a\cos(\nu + x)}{2}\sin\vartheta$$

und

$$q_2 = -q_3 = \frac{b\cos x - a\cos(\nu + x)}{2}\sin\vartheta.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht die Gleichung (6) über in

$$I = \left(\frac{A\lambda}{2\pi b\cos x\sin\vartheta}\right)^2 \left[\frac{\lambda^2}{\pi^2 a^2\cos^2(\nu+x)\sin^2\vartheta}.\sin^2\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 a^2\cos^2(\nu+x)\sin^2\vartheta}.\right.$$
$$\left.\sin^2\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda} - 2\frac{\lambda^2}{\pi^2 a^2\cos^2(\nu+x)\sin^2\vartheta}.\sin^2\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda}\cos\frac{2\pi b\cos x\sin\vartheta}{\lambda}\right]$$
$$= \left[\frac{A\lambda}{\pi b\cos x\sin\vartheta}.\frac{\lambda}{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}.\sin\frac{\pi b\cos x\sin\vartheta}{\lambda}.\sin\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda}\right]^2. \quad (7)$$

Bei $\sin\vartheta = 0$ ist $I = A^2$, also die ungebeugt durch die Oeffnung hindurchgehenden Strahlen liefern das volle Licht. I wird $= 0$ in zwei Fällen,

sowohl wenn $\dfrac{\pi a\cos(\nu + x)\sin\vartheta}{\lambda} = \pm\pi = \pm 2\pi = \pm 3\pi = \ldots.$

als auch wenn $\dfrac{\pi b\cos x\sin\vartheta}{\lambda} = \pm\pi = \pm 2\pi = \pm 3\pi = \ldots.$ ist

Aus der ersten Reihe der Minima folgt mit Uebergehung der negativen Werthe, welche sich auf die entgegengesetzte Seite von OY beziehen,

$$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{b\cos x} = \frac{2\lambda}{b\cos x} = \frac{3\lambda}{b\cos x} = \ldots. \quad (8)$$

aus der zweiten Reihe

$$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{a\cos(\nu + x)} = \frac{2\lambda}{a\cos(\nu + x)} = \frac{3\lambda}{a\cos(\nu + x)} = \ldots. \quad (9)$$

Zieht man in der Blendung durch ihre Mitte O, wo sich die ungebeugt durch die Oeffnung hindurchgehenden Strahlen vereinigen, eine Linie parallel mit OX, nimmt darauf von O aus Ab-

stände $=\frac{L\lambda}{b}=\frac{2L\lambda}{b}=\frac{3L\lambda}{b}=\ldots.$, indem L wie vorher die Länge des Fernrohrs bedeutet, und errichtet in den abgeschnittenen Puncten 1, 2, 3 .... zu OX senkrechte Linien, so geben diese durch alle Minima der ersten Reihe hindurch und erscheinen demnach als die eine Reihe der absolut dunklen Linien in dem durch die Beugung entstehenden Bilde. Denn nach der Formel sollen die Abstände der Minima von O auf $OY=\frac{L\lambda}{b\cos x}=\frac{2L\lambda}{b\cos x}=\ldots.$ sein, dies giebt sie als Secanten des Winkels x zu den Radien $\frac{L\lambda}{b}$, $\frac{2L\lambda}{b}$ ...., welche man durch die angegebene Construction abschneidet. Die zweite Reihe der Minima verzeichnet man ebenso; man nimmt in der Blendung OZ parallel mit AC, schneidet darauf von O aus Abstände $=\frac{L\lambda}{a}=\frac{2L\lambda}{a}=\frac{3L\lambda}{a}=\ldots.$ ab, und ziehet wiederum durch dieselben senkrechte Linien, welche durch alle Minima der zweiten Reihe hindurchgehen; da nämlich $\angle ZOY=180^\circ-(\nu+x)$ ist, so stehen auch hier die Abstände auf OY zu den Abständen auf OZ im Verhältnisse der Secanten von $(\nu+x)$ zu den Radien, oder sie sind $=\frac{L\lambda}{a\cos(\nu+x)}=\frac{2L\lambda}{a\cos(\nu+x)}=\ldots.$ Auf den beiden andern Seiten des Parallelogramms geben die negativen Werthe von $\sin\vartheta$ eine vollkommen gleiche Zeichnung.

Nach dem Gesagten ist es leicht, die dunkelsten Linien in dem aus der Beugung durch ein Parallelogramm entstehenden Bilde unmittelbar so zu entwerfen, wie man sie im Fernrohre sehen wird, vorausgesetzt, dafs man aufser dem Parallelogramm und der Wellenlänge des einfarbigen Lichtes die Länge des Fernrohrs und seine vergröfsernde Kraft kennt. Wählt man die beiden letztern Gröfsen willkürlich, so entsteht ein ähnliches Bild zu dem betrachteten. Es sei z. B. das Parallelogramm $mnpq$ gegeben und in der in der Figur 5. gezeichneten Lage im Schirme vor dem Fernrohre befindlich; auch werde $\frac{L\lambda}{b}=\frac{L\lambda}{qp}=rs$ und $\frac{L\lambda}{a}=\frac{L\lambda}{np}=tu$ angenommen. Wir ziehen durch O die Linie XX' parallel mit mn und ZZ' parallel mit np, schneiden die Linie rs hinter einander auf OX und OX', die Linie tu auf OZ und OZ' ab, und ziehen durch die Puncte 1, 2, 3, 4 ...., senkrechte Linien zu XX' und ZZ', so geben diese die absolut dunkeln Linien im Bilde.

Aufser diesen dunklen Linien verdienen noch die Oerter der Maxima eine nähere Bestimmung; denn liegen sie gleich dem blofsen Anscheine nach ungefähr in der Mitte der einzelnen Parallelogramme, so gehört doch die Kenntnifs ihrer Intensität zur sichern Auffassung des Bildes, das nur im Contraste der Maxima und Minima gegen einander hervortritt. Die Oerter der Maxima folgen aber aus der Gleichung $\frac{dI}{d\vartheta}=0$, also

$$0=-\frac{2\cos\vartheta\,d\vartheta}{ab\cos x\cos(\nu+x)\sin^3\vartheta}\sin\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda}\sin\frac{\pi b\cos x\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$+\frac{\pi a\cos(\nu+x)\cos\vartheta\,d\vartheta}{\lambda(ab\cos x\cos(\nu+x)\sin^2\vartheta)}\cos\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda}\sin\frac{\pi b\cos x\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$+\frac{\pi b\cos x\cos\vartheta\,d\vartheta}{\lambda(ab\cos x\cos(\nu+x)\sin^2\vartheta)}\sin\frac{\pi a\cos(\nu+x)\sin\vartheta}{\lambda}\cos\frac{\pi b\cos x\sin\vartheta}{\lambda}$$

oder

$$0 = -2 \operatorname{tang} \frac{\pi a \cos(\nu + x) \sin \vartheta}{\lambda} \operatorname{tang} \frac{\pi b \cos x \sin \vartheta}{\lambda} + \frac{\pi a \cos(\nu + x) \sin \vartheta}{\lambda} \operatorname{tang} \frac{\pi b \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$$

$$+ \frac{\pi b \cos x \sin \vartheta}{\lambda} \operatorname{tang} \frac{\pi a \cos(\nu + x) \sin \vartheta}{\lambda}. \quad (10)$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn zu gleicher Zeit

$$\operatorname{tang} \frac{\pi a \cos(\nu + x) \sin \vartheta}{\lambda} = \frac{\pi a \cos(\nu + x) \sin \vartheta}{\lambda} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} \frac{\pi b \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = \frac{\pi b \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$$

ist. Nach der Tafel der Maxima bei einer Spalte hat man $\operatorname{tang} \alpha = \alpha$ für $\alpha = 0^0 = 257^0\,27'$ $= 442^0\,37' = 624^0\,46' = 805^0\,56' = 986^0\,40' = 1167^0\,12' = 1347^0\,34' = \ldots$. Man nehme also auf OX und OX' von O aus Abstände $= 0 = \frac{257^0\,27'}{180^0} \cdot \frac{L\lambda}{b} = \frac{442^0\,37'}{180^0} \cdot \frac{L\lambda}{b} = \ldots$, ziehe durch diese Puncte senkrechte Linien zu XX', ebenso nehme man auf OZ und OZ' Abstände $= 0 = \frac{257^0\,27'}{180^0} \cdot \frac{L\lambda}{a} = \frac{442^0\,37'}{180^0} \cdot \frac{L\lambda}{a} = \ldots$, errichte auch in diesen Puncten Perpendikel zu ZZ', dann sind die Durchschnittspuncte der Perpendikel unter einander die gesuchten Oerter der Maxima. Die Intensitäten derselben berechnet man zuerst für den Fall, dafs die eine von beiden Tangenten $= 0$ ist, und findet dadurch die Maxima in den beiden Reihen der gröfsern Parallelogramme; sie haben dieselben Werthe wie die oben berechneten, nämlich

1 Max. $= 1{,}000000\ A^2$
2 Max. $= 0{,}047191\ A^2$
3 Max. $= 0{,}016480\ A^2$
4 Max. $= 0{,}008342\ A^2$ u. s. w.

Hieraus leitet man die Intensität der Maxima in den übrigen Parallelogrammen ab; man bezeichne zu diesem Behufe das Parallelogramm, welches durch die Perpendikel in 1, 2 auf OX und in 1, 2 auf OZ gebildet wird, mit $\overline{|2,2|}$, das zwischen den Perpendikeln in 2, 3 und 1, 2 mit $\overline{|3,2|}$ u. s. f., so ergiebt sich die Intensität der Maxima in

$\overline{|2,2|} = 0{,}047191 \times 0{,}047191\,A^2$
$\overline{|2,3|} = 0{,}047191 \times 0{,}016480\,A^2$
$\overline{|3,3|} = 0{,}016480 \times 0{,}016480\,A^2$
$\overline{|3,4|} = 0{,}016480 \times 0{,}008342\,A^2$ u. s. w.

Man sieht aus dieser Tabelle, dafs während die Intensitäten der Maxima in den gröfsern Parallelogrammen noch einigermafsen bedeutend sind, sie dagegen in den zwischenliegenden Parallelogrammen so schnell abnehmen, dafs sich das Bild für das Auge in Form eines Kreuzes entwickelt.

Die bisher beschriebene Erscheinung tritt nur auf, wenn $p_4 = p_3 = p_2 = p_1 = 0$ sind; bei Messungen mit dem Theodolithen sind aber $q_4 = q_3 = q_2 = q_1 = 0$; allein p_4, p_3, p_2 und p_1 nehmen, wie man sich leicht überzeugen wird, solche Werthe an, dafs das Bild dasselbe bleibt und gleich wie ein in unendlicher Entfernung vorm Schirme befindliches betrachtet werden kann, auf dessen einzelne Stellen man nach und nach das Fernrohr richtet. Selbst den allgemeinen

Fall, wo die Oeffnung sowohl zu den einfallenden als den gebeugten Strahlen schräg steht, führt man auf den vorher betrachteten zurück, wenn man die Richtung der einfallenden Strahlen als Mittellinie, und statt der gegebenen Oeffnung ihre Projection auf die einfallende Wellenebene nimmt. — Bei Anwendung von weifsem Lichte endlich werden die Parallelogramme, wie natürlich, farbige Spectra.

4. Erscheinungen durch eine dreieckige Oeffnung.

Die allgemeine Formel (6) geht auf ein Dreieck über, wenn man $P_4 = P_3$ setzt. Demnach ist die Intensität der durch eine dreieckige Oeffnung im dunklen Schirme gebeugten Strahlen =

$$I = \left(\frac{A\lambda}{\pi(P_2 - P_1)}\right)^2 \left\{\frac{\lambda^2}{\pi^2 (P_3 - P_2)^2} \sin^2 \frac{\pi(P_3 - P_2)}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{\pi^2 (P_3 - P_1)^2} \sin^2 \frac{\pi(P_3 - P_1)}{\lambda}\right.$$
$$\left. - 2 \frac{\lambda^2}{\pi^2 (P_3 - P_2)(P_3 - P_1)} \sin \frac{\pi(P_3 - P_2)}{\lambda} \sin \frac{\pi(P_3 - P_1)}{\lambda} \cos \frac{\pi(P_2 - P_1)}{\lambda}\right\}. \quad (11)$$

Es sei wiederum der Schirm senkrecht gegen die Axe des gerade auf den Lichtpunct gerichteten Fernrohrs, so fallen die Strahlen senkrecht auf die gegebene dreieckige Oeffnung und p_3, p_2, p_1 werden gleich Null. Ferner sei (Fig. 6.) $AC = a$, $AB = b$, $\angle CAB = \nu$, O liege in der Mitte von BC; man ziehe OX parallel mit AB, OY unter dem Winkel x gegen OX, FG senkrecht zu OY, endlich $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ senkrecht zu FG, so findet man auch hier, wenn ϑ den Neigungswinkel der gebeugten Wellenebene gegen OY bezeichnet,

$$A\alpha = \frac{b\cos x + a\cos(\nu + x)}{2} \quad \text{und} \quad B\beta = C\gamma = \frac{b\cos x - a\cos(\nu + x)}{2},$$

folglich

$$-q_1 = \frac{b\cos x + a\cos(\nu + x)}{2}\sin\vartheta \quad \text{und} \quad q_2 = -q_3 = \frac{b\cos x - a\cos(\nu + x)}{2}\sin\vartheta.$$

Diese Werthe in die Formel (11) substituirt, wird

$$I = \left(\frac{A\lambda}{\pi b\cos x \sin\vartheta}\right)^2 \left\{\frac{\lambda^2}{\pi^2 [b\cos x - a\cos(\nu + x)]^2 \sin^2\vartheta} \sin^2 \frac{\pi[b\cos x - a\cos(\nu + x)]\sin\vartheta}{\lambda}\right.$$
$$+ \frac{\lambda^2}{\pi^2 [a\cos(\nu + x)\sin\vartheta]^2} \sin^2 \frac{\pi a\cos(\nu + x)\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$- 2 \frac{\lambda^2}{\pi^2 [(b\cos x - a\cos(\nu + x)\sin\vartheta] [a\cos(\nu + x)\sin\vartheta]} \sin \frac{\pi[b\cos x - a\cos(\nu + x)]\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$\left. \times \sin \frac{\pi a\cos(\nu + x)\sin\vartheta}{\lambda} \cos \frac{\pi b\cos x \sin\vartheta}{\lambda}\right\}. \quad (12)$$

Nach dieser Formel ist $I = 0$, wenn mit Ausnahme von $\sin\vartheta = 0$ die beiden Gleichungen

$$\sin \frac{\pi[b\cos x - a\cos(\nu + x)]\sin\vartheta}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi a\cos(\nu + x)\sin\vartheta}{x} = 0$$

zu gleicher Zeit statt finden, oder auch wenn zu gleicher Zeit

$$\sin \frac{\pi b\cos x \sin\vartheta}{\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi a\cos(\nu + x)\sin\vartheta}{\lambda} = 0$$

sind, wofern man nur diejenigen Verbindungen von Werthen übergeht, welche $\frac{\pi[b\cos x - a\cos(\nu + x)]\sin\vartheta}{\lambda} = 0$ machen, das ist alle gleichen Werthe von $\frac{\pi b\cos x \sin\vartheta}{\lambda}$ und $\frac{\pi a\cos(\nu + x)\sin\vartheta}{\lambda}$.

Die beiden letztern Bedingungsgleichungen sind dieselben, welche einzeln die Bedingungsgleichungen für die Minima des durch ein Parallelogramm entstehenden Bildes waren. Daher gilt auch hier dieselbe Construction, nur herrscht keine absolute Dunkelheit auf den Perpendikeln überhaupt, sondern allein in ihren Durchschnittspuncten, und von diesen auch in denen nicht, welche von Perpendikeln durch gleiche Abschnittspuncte herkommen. Die Construction ist folgende: ABC (Fig. 7.) ist das gegebene Dreieck und befindet sich im Schirme in der gezeichneten Lage; mn sei $=\frac{L\lambda}{b}$ und $op=\frac{L\lambda}{a}$. Man zieht XX' durch O parallel mit BA und ZZ' parallel mit CA, macht auf OX und OX' die Abschnitte 1, 2, 3, 4 .... $=mn$, auf OZ und OZ' die Abschnitte 1, 2, 3, 4 .... $=op$, und errichtet die Perpendikel, dann liegen die absoluten Minima in den stärker bezeichneten Puncten, einen sechsseitigen Stern bildend. — Die Bestimmung der Maxima unterliegt gröfsern Schwierigkeiten und verlangt eine vollständig berechnete Tabelle der Intensitäten; wir übergehen sie der Kürze halber.

5. Erscheinungen durch eine kreisrunde Oeffnung.

Der Schirm mit der kreisrunden Oeffnung $BDEA$ (Fig. 8.) stehe senkrecht gegen die Axe des Fernrohrs und gegen die einfallenden Strahlen; man suche die Intensität der gegen den willkürlichen Radius CA gebeugten Strahlen. Es sei $CA=r$, $\angle BCD=\varphi$, $\angle DCE=d\varphi$, $FC=fC=z$, $FI=fi=dz$, so ist der Weg der durch das Element $FGHI$ hindurchgehenden Strahlen bis zur gebeugten Wellenebene, deren Neigung gegen $CA=\vartheta$ sei, $=(r+z\cos\varphi)\sin\vartheta$, und der Weg der durch das Element $fghi$ hindurchgehenden Strahlen $=(r-z\cos\varphi)\sin\vartheta$. Nimmt man die Intensität des auf den ganzen Kreis auffallenden Lichtes $=A^2$ an, so folgt die Intensität des in Untersuchung gezogenen gebeugten $=$

$$I=\left[\iint\frac{A\,d\varphi\,z\,dz}{r^2\pi}\left(\cos\frac{2\pi(r+z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}+\cos\frac{2\pi(r-z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}\right)\right]^2$$
$$+\left[\iint\frac{A\,d\varphi\,z\,dz}{r^2\pi}\left(\sin\frac{2\pi(r+z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}+\sin\frac{2\pi(r-z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}\right)\right]^2,$$

integrirt von $z=0$ bis $z=r$ und von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi$.

Es ist aber

$$\int z\,dz\left(\cos\frac{2\pi(r+z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}+\cos\frac{2\pi(r-z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}\right)$$
$$=\int 2z\,dz\cos\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\cos\frac{2\pi z\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$=2r\cos\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\times\frac{\lambda}{2\pi\cos\varphi\sin\vartheta}\sin\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$-\int 2\,dz\frac{\lambda}{2\pi\cos\varphi\sin\vartheta}\cos\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\cdot\sin\frac{2\pi z\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$=\frac{2r\lambda}{2\pi\cos\varphi\sin\vartheta}\cos\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\cdot\sin\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}$$
$$+2\frac{\lambda^2}{(2\pi\cos\varphi\sin\vartheta)^2}\cos\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\left(\cos\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}-1\right).$$

Ebenso ist

$$\int z\,dz\left(\sin\frac{2\pi(r+z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}+\sin\frac{2\pi(r-z\cos\varphi)\sin\vartheta}{\lambda}\right)$$

$$=\int 2z\,dz\,\sin\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\cos\frac{2\pi z\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}$$

$$=\frac{2r\lambda}{2\pi\cos\varphi\sin\vartheta}\sin\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\cdot\sin\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}$$

$$+2\frac{\lambda^2}{(2\pi\cos\varphi\sin\vartheta)^2}\sin\frac{2\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\left(\cos\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}-1\right).$$

Also

$$I=\left[\int\frac{A\,d\varphi}{r^2\pi}\cdot\frac{2r\lambda}{2\pi\cos\varphi\sin\vartheta}\sin\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}\right.$$

$$\left.+\int\frac{A\,d\varphi}{r^2\pi}\cdot\frac{2\lambda^2}{(2\pi\cos\varphi\sin\vartheta)^2}\left(\cos\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}-1\right)\right]^2$$

$$=\left[\int\frac{A\,d\varphi}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}\sin\frac{2\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}\right.$$

$$\left.-\int\frac{A\,d\varphi}{\pi}\cdot\frac{\lambda^2}{(\pi r\cos\varphi\sin\vartheta)^2}\sin^2\frac{\pi r\cos\varphi\sin\vartheta}{\lambda}\right]^2$$

Setzt man $\frac{\pi r\sin\vartheta}{\lambda}=M$, so ist

$$I=\left[\int\frac{A\,d\varphi}{\pi}\left(2-\frac{2^3M^2\cos^2\varphi}{2.3}+\frac{2^5M^4\cos^4\varphi}{2.3.4.5}-\frac{2^7M^6\cos^6\varphi}{2.3.4.5.6.7}+\ldots\right)\right.$$

$$\left.-\int\frac{A\,d\varphi}{\pi}\left(\frac{2}{2}-\frac{2^3M^2\cos^2\varphi}{2.3.4}+\frac{2^5M^4\cos^4\varphi}{2.3.4.5.6}-\frac{2^7M^6\cos^6\varphi}{2.3.4.5.6.7.8}+\ldots\right)\right]^2$$

$$=A^2\left[2-\frac{2^3M^2}{2.3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2^5M^4}{2.3.4.5}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\frac{2^7M^6}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{2}-\frac{2^3M^2}{2.3.4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2^5M^4}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\frac{2^7M^6}{2.3.4.5.6.7.8}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\right)\right]^2$$

$$=A^2\left[1-\frac{2^3M^2}{2.4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2^5M^4}{2.3.4.6}\cdot\frac{1.3}{2.4}-\frac{2^7M^6}{2.3.4.5.6.8}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}+\ldots\right]^2$$

$$=A^2\left[1-\frac{M^2}{1.2}+\frac{M^4}{(1.2)^2.3}-\frac{M^6}{(1.2.3)^2.4}+\frac{M^8}{(1.2.3.4)^2.5}-\ldots\right]^2$$

oder, nach Substitution des Werthes von M,

$$I=A^2\left[1-\left(\frac{\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\right)^2\frac{1}{1.2}+\left(\frac{\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\right)^4\frac{1}{(1.2)^2.3}-\left(\frac{\pi r\sin\vartheta}{\lambda}\right)^6\frac{1}{(1.2.3)^2.4}+\ldots\right]^2.\quad(13)$$

Um nach dieser Formel die Minima und Maxima zu finden, mufs man die Intensitäten für die verschiedenen Werthe von $\frac{\pi r\sin\vartheta}{\lambda}$ etwa von 15 zu 15 Grad berechnen, und die genauern Resultate durch Interpolation bestimmen. Auf diese Weise erhält man

	$\frac{\pi r \sin \vartheta}{\lambda}$	Intensität.
1 Max.	0°	1,00000 A^2
1 Min.	109°,8	0,00000 A^2
2 Max.	147,5	0,01745 A^2
2 Min.	200,9	0,00000 A^2
3 Max.	240	0,00415 A^2
3 Min.	291,4	0,00000 A^2
4 Max.	332,5	0,00165 A^2
4 Min.	381,6	0,00000 A^2
5 Max.	425	0,00078 A^2
5 Min.	466,8	0,00000 A^2

Die Minima habe ich aus Schwerds Tabelle, die mit den Resultaten der obigen Formel fast genau übereinstimmt, entnommen, und die Maxima nur annähernd berechnet. — Bei Messungen mit dem Theodolithen bleibt ϑ unverändert $= 0$, dagegen variirt der Winkel χ zwischen dem Schirm und der Wellenebene der einfallenden Strahlen; aber grade wie früher vertritt χ auch hier die Stelle von ϑ und eine Correction wird nur erforderlich, wenn der Lichtpunct nicht so weit entfernt ist, dafs man die von ihm ausgehenden Strahlen als vollkommen parallel unter einander ansehen kann.

Fraunhofer hat genaue Messungen in weifsem Lichte ausgeführt; einige enthält die folgende Tafel.

Durchm. 2r	1 Min. χ beob.	1 Min. χ berechn.	2 Min. χ beob.	2 Min. χ berechn.	3 Min. χ beob.	3 Min. χ berechn.	4 Min. χ beob.	4 Min. χ berechn.	5 Min. χ beob.	5 Min. χ berechn.
par. Z. 0,06713	1′ 22″	1′ 19″	2′ 27″	2′ 25″	3′ 30″	3′ 30″	4′ 32″	4′ 35″		
0,03997	2 13	2 13	4 3	4 3	5 55	5 53	7 49	7 42	9′ 41″	9′ 31″
0,03318	2 42	2 40	4 52	4 53	7 6	7 5	9 19	9 16	11 32	11 28
0,02318	3 49	3 49	6 58	6 59	10 14	10 8	13 24	13 16		
0,02134	4 4	4 9	7 26	7 35	10 56	11 0	14 16	14 25		
0,01740	5 3	5 4	9 19	9 16	13 23	13 27	17 52	17 37		
0,00922	9 27	9 36	17 35	17 34	25 34	25 29				

Die Berechnung auf beliebig einfallende und beliebig gebeugte Strahlen auszudehnen, scheint um so überflüssiger, als die Beobachtungen grade nichts Neues darbieten.

Die bisher behandelten Fälle sind die wichtigsten unter denen, in welchen die Beugungserscheinungen durch eine einzelne Oeffnung entstehen; hierzu kommen nun noch die Erscheinungen durch mehere, irgendwie regelmäfsig geordnete Oeffnungen.

6. Erscheinungen durch mehere beliebige Oeffnungen im Schirme.

Der Einfachheit wegen soll den folgenden Untersuchungen überall die sicher nicht zu sehr beschränkende Voraussetzung zum Grunde liegen, dafs die Strahlen senkrecht auf die mit den Oeffnungen versehene Schirmfläche fallen; denn sind unter dieser Bedingung die Beugungserscheinungen nach einer beliebigen Richtung und unter einem beliebigen Winkel gefunden, so sind dadurch zugleich

auch die Erscheinungen für den Fall bestimmt, wenn die gebeugten Strahlen senkrecht zur Schirmfläche ausgehen, die einfallenden dagegen in der umgekehrten Richtung unter demselben Winkel auf den Schirm treffen. Das letzte genügt für die Messungen, das erste für die gewöhnlichen Beobachtungen. Es seien nun A, B, C, D, ... (Fig. 9.) die Mittelpuncte von ebenso vielen Oeffnungen im Schirme; ihre Lage werde gegeben durch die rechtwinkligen Coordinaten $OA' = \alpha$, $AA' = a$; $OB' = \beta$, $BB' = b$; $OC' = \gamma$, $CC' = c$; $OD' = \delta$, $DD' = d$, ... ferner sei OZ die Durchschnittslinie einer Wellenebene der gebeugten Strahlen mit dem Schirme, ϑ der Neigungswinkel, und $\angle ZOX = x$. Man fälle von A, B, C, D, ... auf OZ die Perpendikel AA'', BB'', CC'', DD'', ..., dann ist der gemeinsame Weg der Strahlen durch A bis zur gebeugten Wellenebene $= AA'' \sin\vartheta$ $= (a \cos x - \alpha \sin x) \sin\vartheta$, der Strahlen durch $B = BB'' \sin\vartheta = (b \cos x - \beta \sin x) \sin\vartheta$ u. s. w. Setzt man daher die aus dem Frühern bekannte Intensität der nach der genommenen Richtung durch A gebeugten Strahlen $= \mathfrak{A}^2$, der durch $B = \mathfrak{B}^2$ u. s. f., so folgt die Intensität aller gebeugten Strahlen:

$$I = \left\{ \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi (a \cos x - \alpha \sin x) \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{B} \cos \frac{2\pi (b \cos x - \beta \sin x) \sin\vartheta}{\lambda} + \dots \right\}^2$$

$$+ \left\{ \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi (a \cos x - \alpha \sin x) \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{B} \sin \frac{2\pi (b \cos x - \beta \sin x) \sin\vartheta}{\lambda} + \dots \right\}^2. \quad (14)$$

7. Erscheinungen durch mehere gleiche Oeffnungen in einer Reihe.

Die allgemeine Formel (14) gewinnt in vielen Fällen eine einfachere Gestalt. Wir nehmen zuerst an, dafs alle Oeffnungen gleich sind, in gleichen Entfernungen e von einander abstehen und sämmtlich in einer Reihe liegen. Man verlege den Anfangspunct der Coordinaten in die Mitte der ersten Oeffnung und gebe der Axe OX die Richtung senkrecht zur Reihe der Oeffnungen; dann ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \dots$, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dots = 0$, $a = 0$, $b = e$, $c = 2e$, $d = 3e$, ... und die Gleichung (14) geht über in

$$I = \left\{ \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi . 2e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi . 3e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \dots \right\}^2$$

$$+ \left\{ 0 + \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi . 2e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi . 3e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \dots \right\}^2,$$

oder, wenn n die Anzahl der Oeffnungen bezeichnet,

$$I = \mathfrak{A}^2 \left(\frac{\sin \dfrac{2\pi . \frac{n-1}{2} e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} \sin \dfrac{2\pi . \frac{n}{2} e \cos x \sin\vartheta}{\lambda}}{\sin \dfrac{2\pi . \frac{e}{2} \cos x \sin\vartheta}{\lambda}} \right)^2$$

$$+ \mathfrak{A}^2 \left(\frac{\cos \dfrac{2\pi . \frac{n-1}{2} e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} \sin \dfrac{2\pi . \frac{n}{2} e \cos x \sin\vartheta}{\lambda}}{\sin \dfrac{2\pi . \frac{e}{2} \cos x \sin\vartheta}{\lambda}} \right)^2 = \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 \dfrac{\pi n e \cos x \sin\vartheta}{\lambda}}{\sin^2 \dfrac{\pi e \cos x \sin\vartheta}{\lambda}}. \quad (15)$$

Nach dieser Formel wird die Intensität $= 0$ oder ein Minimum, erstens wenn $\mathfrak{A}^2 = 0$ ist; dies sind die vorher ausführlicher untersuchten Fälle; zweitens wenn $\sin \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = 0$, ohne dafs zugleich $\sin \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = 0$ ist, also

$$\text{wenn } \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = \pm \pi = \pm 2\pi = \pm 3\pi = \ldots.$$

ohne dafs zu gleicher Zeit

$$\frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = \pm \pi = \pm 2\pi = \pm 3\pi \ldots. \text{ ist.}$$

Durch diese Gleichung sind die neu hinzukommenden Minima gegeben. Die Maxima giebt $\frac{dI}{d\vartheta} = 0$, nämlich

$$0 = \left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\vartheta}\right) d\vartheta + \mathfrak{A} \frac{\cos \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}} \times \frac{\pi n e \cos x \cos \vartheta \, d\vartheta}{\lambda}$$
$$- \mathfrak{A} \frac{\sin \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}} \cos \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} \times \frac{\pi e \cos x \cos \vartheta \, d\vartheta}{\lambda}.$$

Allein diese Gleichung löst sich weder im Allgemeinen, noch führt sie in speciellen Fällen zu bequemen Resultaten. Schon deshalb ist es wichtig, die Minima und Maxima des Factors $\frac{\sin^2 \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}$ kennen zu lernen; aber es wird noch um so wichtiger, als die Werthe desselben einem periodischen Wechsel unterliegen, der in manchen Beziehungen den Ueberblick über die Minima und Maxima der aus der allgemeinen Formel resultirenden Intensitäten erleichtert. Für den genannten Factor allein wird aus $\frac{dI}{d\vartheta} = 0$,

$$0 = n \cos \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} - \frac{\sin \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}} \cos \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$$

oder

$$n \operatorname{tang} \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = \operatorname{tang} \frac{\pi n e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}.$$

Die folgende Tafel giebt die Minima und Maxima des Factors mit seinen Werthen $= W$ durch die erste Periode bis zu sechs Oeffnungen.

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
$\frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$	$W.$	$\frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$	$W.$	$\frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$	$W.$
1 Max. . . . 0°	4,0000	1 Max. . . . 0°	9,0000	1 Max. . . . 0°	16,0000
1 Min. . . . 90°	0,0000	1 Min. . . . 60°	0,0000	1 Min. . . . 45°	0,0000
2 Max. . . . 180°	4,0000	2 Max. . . . 90°	1,0000	2 Max. . . . 65° 54′	1,1852
		2 Min. . . . 120°	0,0000	2 Min. . . . 90°	0,0000
		3 Max. . . . 180°	9,0000	3 Max. . . . 114° 6′	1,1852
				3 Min. . . . 135°	0,0000
				4 Max. . . . 180°	16,0000

$n = 5$		$n = 6$	
$\frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$	$W.$	$\frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}$	$W.$
1 Max. . . . 0°	25,0000	1 Max. . . . 0°	36,0000
1 Min. . . . 36°	0,0000	1 Min. . . . 36°	0,0000
2 Max. . . . 52° 15′	1,5625	2 Max. . . . 43° 11′	2,0590
2 Min. . . . 72°	0,0000	2 Min. . . . 60°	0,0000
3 Max. . . . 90°	1,0000	3 Max. . . . 74° 34′	1,0740
3 Min. . . . 108°	0,0000	3 Min. . . . 90°	0,0000
4 Max. . . . 127° 45′	1,5625	4 Max. . . . 105° 26′	1,0740
4 Min. . . . 144°	0,0000	4 Min. . . . 120°	0,0000
5 Max. . . . 180°	25,0000	5 Max. . . . 135° 49′	2,0590
		5 Min. . . . 150°	0,0000
		6 Max. . . . 180°	36,0000

Diese Tafel genügt schon um zu zeigen, dafs sich innerhalb jeder Periode die Werthe der Maxima von ihrem gröfsten Werthe bei 0° herabsenken und wieder zu demselben Werthe erheben; verbunden mit den Factoren $\mathfrak{A}^2$ werden daher in den resultirenden Intensitäten ähnliche, wenn auch wegen der stetigen Abnahme von $\mathfrak{A}^2$ geringere Hebungen und Senkungen entstehen, und nach Fraunhofers Vorgang eine Unterscheidung der Streifen oder der farbigen Spectra nach verschiedenen Klassen vollkommen rechtfertigen. Doch es würde zu weit führen, wollte ich die Werthe der Maxima nach der allgemeinen Formel berechnen; ich begnüge mich daher für die einzelnen Reihen beliebiger Oeffnungen nur die Lage der Minima anzugeben, und will allein bei den Erscheinungen durch Gitter auf die Maxima die erforderliche Rücksicht nehmen.

Es seien zunächst zwei gleiche Oeffnungen gegeben, nämlich zwei Spalten, zwei Parallelogramme, zwei Dreiecke oder zwei Kreise, so bleiben in der Formel

$$I = \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 \frac{2\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}$$

zuerst wegen des Factors $\mathfrak{A}^2$, der von der Form der Oeffnungen herrührt, die Minima eben dieselben, als wie sie eine von den beiden Oeffnungen für sich allein hervorbringen würde; bei Spalten entstehen die parallelen Streifen, bei Parallelogrammen das Kreuz, bei Dreiecken der sechsseitige Stern und bei Kreisen die concentrischen Ringe. Der andere Factor liefert neue Minima, nämlich

$$\text{bei} \quad \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda} = \pm \tfrac{1}{2}\pi = \pm \tfrac{3}{2}\pi = \pm \tfrac{5}{2}\pi = \ldots.$$

$$\text{oder bei} \quad \sin \vartheta = \pm \frac{\lambda}{2e \cos x} = \pm \frac{3\lambda}{2e \cos x} = \pm \frac{5\lambda}{2e \cos x} = \ldots.$$

Der Winkel x ward aber gebildet durch die Senkrechte zur Richtungslinie der Oeffnungen und die Durchschnittslinie der gebeugten Wellenebene mit der Schirmfläche, oder was dasselbe ist, durch die Richtungslinie der Oeffnungen und die Projection der gebeugten Strahlen auf die Schirmfläche. Ist daher L wiederum die Länge des Fernrohrs, so hat man von der Mitte der Blendung auf einer zur Richtungslinie der Oeffnungen Parallelen Abschnitte $= \pm \frac{L\lambda}{2e} = \pm \frac{3L\lambda}{2e} = \pm \frac{5L\lambda}{2e} = \ldots$ zu nehmen, darauf Perpendikel zu errichten, und bekommt in diesen die vom Factor

$$\frac{\sin^2 \frac{2\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi e \cos x \sin \vartheta}{\lambda}}$$

herrührenden dunklen Linien. Zur Anschaulichkeit verzeichne ich eine Figur. Als Oeffnungen seien zwei Kreise (Fig. 10.) in der gezeichneten Lage gegeben. Ein Kreis allein erzeuge für die absoluten Minima die angezogenen concentrischen Ringe. Ist dann ferner $\frac{L\lambda}{2e} = mn$, so zieht man CAA' parallel zu ab, nimmt von C aus nach A und A' Abschnitte $= mn = 3mn = 5mn = \ldots$, errichtet darauf die Perpendikel, und die Figur enthält die Linien aller absoluten Minima.

Bei einigen Oeffnungen hängt von der Lage derselben und ihrem gegenseitigen Abstande die mehr oder weniger regelmäfsige Beugungserscheinung ab. Sollen namentlich die durch Parallelogramme entstehenden Figuren ein gefälliges Bild gewähren, so hat man besonders darauf zu sehen, dafs die neu hinzukommenden Minima mit den ursprünglichen gut correspondiren, also entweder aufser einem passend gewählten Werthe von e die neuen dunklen Linien mit der einen Abtheilung der frühern parallel zu legen oder sie beide Abtheilungen gleichmäfsig durchschneiden zu lassen. Die erste Bedingung erreicht man, wenn die Verbindungslinie der beiden Parallelogramme mit einer ihrer Seiten parallel ist. Liegt z. B. in den beiden Parallelogrammen A und B (Fig. 11.) die Linie AB parallel zu cd und ef, so entsteht bei $\frac{L\lambda}{a} = mn$, $\frac{L\lambda}{b} = op$ und $\frac{L\lambda}{2e} = \frac{1}{3}mn$, $e = \frac{3}{2}a$ angenommen, die verzeichnete Figur. Der zweite Fall fordert AB gleichmäfsig gegen die beiden Seiten a und b geneigt. Als Beispiel mögen zwei Quadrate dienen, die in der gezeichneten Lage (Fig. 12.) mit ihren Ecken an einander stofsen. Die Seite eines Quadrates sei $= a$ und $\frac{L\lambda}{a} = mn$, so folgt zuerst als ursprüngliche Figur der Minima das schräge Kreuz; dazu kommen die neuen Minima senkrecht zu MM' in Abständen von $C = \pm \frac{L\lambda}{2e} = \pm \frac{3L\lambda}{2e} = \ldots$; es ist aber $e = a\sqrt{2}$,

also $\frac{L\lambda}{2e} = \frac{mn\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}Cp$ der Figur; somit entsteht die angegebene Vertheilung der senkrecht zu MM' gezogenen dunklen Linien.

Drei, vier oder mehere Oeffnungen bieten für die Entwerfung der dunklen Linien keine weitern Schwierigkeiten dar; man zeichnet auch hier zuerst die Figur für eine Oeffnung, und trägt nach der obigen Tafel die Linien der neuen Minima senkrecht gegen die Richtungslinie der Oeffnungen ein. Eine schickliche Lage derselben und passende Werthe für e gewähren auch hier regelmäfsige und schön in die Augen fallende Erscheinungen.

Für eine Reihe gleicher Spalten ist die Intensität der senkrecht zu den Spalteurändern gebeugten Strahlen:

$$I = A^2 \left\{\frac{\sin\pi\gamma\,\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\pi\gamma\,\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}\right\}^2 \left\{\frac{\sin\pi n e\,\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin\pi e\,\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}\right\}^2.$$

Die Lage der Minima folgt aus dem Obigen; die Bestimmung der Maxima dagegen erfordert weitläufige Tabellen, sobald es auf strenge Resultate ankommt; begnügt man sich aber, sicher ohne irgendwie bedeutend von der Wahrheit abzugeben, die Maxima in die Mitte von je zwei auf einander folgenden Minimis zu setzen, so lassen sich für besondere Gitter leicht Tabellen entwerfen, die eine allgemeinere Uebersicht über die hier vorkommenden Erscheinungen ungemein erleichtern. Die folgende Tafel giebt die Minima und genäherten Maxima für Gitter mit 2, 3, 4 und 10 Spalten unter der Annahme, dafs $e = 2\gamma$ oder dafs der die Spalten trennende Zwischenraum mit ihnen von gleicher Breite ist.

$e = 2\gamma\ .\ n = 2$			$e = 2\gamma\ .\ n = 3$		
	$\pi\gamma \sin\vartheta\,\lambda^{-1}$	Intens.		$\pi\gamma \sin\vartheta\,\lambda^{-1}$	Intens.
1 Max.	0°	4,0000 A^2	1 Max.	0°	9,0000 A^2
1 Min.	45	0,0000 -	1 Min.	30	0,0000 -
2 Max.	90	1,6212 -	2 Max.	45	0,8105 -
2 Min.	135	0,0000 -	2 Min.	60	0,0000 -
3 Max.	157½	0,0388 -	3 Max.	90	0,6476 -
3 Min.	180	0,0000 -	3 Min.	120	0,0000 -
4 Max.	202½	0,0246 -	4 Max.	135	0,0901 -
4 Min.	225	0,0000 -	4 Min.	150	0,0000 -
5 Max.	270	0,1975 -	5 Max.	165	0,0323 -
5 Min.	315	0,0000 -	5 Min.	180	0,0000 -
6 Max.	337½	0,0088 -	6 Max.	195	0,0231 -
6 Min.	360	0,0000 -	6 Min.	210	0,0000 -
7 Max.	382½	0,0069 -	7 Max.	225	0,0324 -
7 Min.	405	0,0000 -	7 Min.	240	0,0000 -
8 Max.	450	0,0648 -	8 Max.	270	0,4055 -
8 Min.	495	0,0000 -	8 Min.	300	0,0000 -

$e = 2\gamma \;.\; n = 4$

	$\pi\gamma \sin\vartheta\,\lambda^{-1}$	Intens.
1 Max.	0°	16,0000 A^2
1 Min.	22½	0,0000 -
2 Max.	33¾	1,0422 -
2 Min.	45	0,0000 -
3 Max.	56¼	0,8404 -
3 Min.	67½	0,0000 -
4 Max.	90	6,4846 -
4 Min.	112½	0,0000 -
5 Max.	123¾	0,1720 -
5 Min.	135	0,0000 -
6 Max.	146¼	0,0555 -
6 Min.	157½	0,0000 -
7 Max.	168¾	0,0300 -
7 Min.	180	0,0000 -
8 Max.	191¼	0,0233 -
8 Min.	202½	0,0000 -
9 Max.	213¾	0,0260 -
9 Min.	225	0,0000 -
10 Max.	236¼	0,0476 -
10 Min.	247½	0,0000 -
11 Max.	270	0,7205 -
11 Min.	292½	0,0000 -

$e = 2\gamma \;.\; n = 10$

	$\pi\gamma \sin\vartheta\,\lambda^{-1}$	Intens.
1 Max.	0°	100,0000 A^2
1 Min.	9	0,0000 -
2 Max.	13½	4,7627 -
2 Min.	18	0,0000 -
3 Max.	22½	1,8992 -
3 Min.	27	0,0000 -
4 Max.	31½	1,1377 -
4 Min.	36	0,0000 -
5 Max.	40½	0,8653 -
5 Min.	45	0,0000 -
6 Max.	49½	0,7941 -
6 Min.	54	0,0000 -
7 Max.	58½	0,8784 -
7 Min.	63	0,0000 -
8 Max.	67½	1,2300 -
8 Min.	72	0,0000 -
9 Max.	76½	2,5733 -
9 Min.	81	0,0000 -
10 Max.	90	40,5285 -
10 Min.	99	0,0000 -
11 Max.	103½	1,4058 -
39 Max.	270	4,5032 -

Die Tafel zeigt, dafs dem Obigen entsprechend die Anzahl der Streifen mit der Anzahl der Oeffnungen zunimmt, und dafs sie unter übrigens gleichen Umständen immer kleiner an Breite werden. Sie zeigt aber ferner, dafs die entstehenden Streifen in ihrer Mitte eine sehr ungleiche Intensität besitzen, denn schon der zweite verliert gegen den ersten so viel an Helligkeit, dafs er nur wenig gegen ihn hervortritt, dagegen sind bei $e = 2\gamma$ die Maxima auf 90°, 270°, ... wieder bedeutender, sie bilden mit dem Maximum von 0° eine gröfsere Periode, die um ihres Glanzes willen dem Auge die übrigen Streifen leicht entzieht, ja desto leichter entzieht, wenn die Anzahl der Oeffnungen grofs und das angewandte Licht weifses ist. Denn da im letztern Falle die Oerter der genannten Maxima von der Mitte der Blendung um $\frac{L\lambda}{2\gamma}$, $\frac{3L\lambda}{2\gamma}$, $\frac{5L\lambda}{2\gamma}$ .... abstehen, so breiten sich die hellen farbigen Streifen von Violett bis zum Roth, oder von Fraunhofers Strahl H bis B von $\frac{0^z,0000145\,1\,L}{2\gamma}$ bis $\frac{0^z,00002541\,L}{2\gamma}$, von $\frac{0^z,00004353\,L}{2\gamma}$ bis $\frac{0^z,00007623\,L}{2\gamma}$, von $\frac{0^z,00007255\,L}{2\gamma}$ bis $\frac{0^z,00012705\,L}{2\gamma}$ .... aus, und bilden durch die Intensität der übrigen Streifen wenig gestört gut getrennte und dabei in die einzelnen Farben vollkommen zerlegte, somit recht deutliche Spectra. Je

kleiner übrigens die Breite der Oeffnungen ist, um desto schöner entfalten sich diese Spectra in einer Ausdehnung, daſs sie selbst das unbewaffnete Auge deutlich erkennen kann.

Besteht die Reihe aus periodisch wiederkehrenden ungleich breiten Spalten, $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, die in Abständen $e, e', e'', \ldots\, e, e', e'', \ldots$ liegen, so geht mit Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen und bei $\cos x = 1$ die Gleichung (14) über in:

$$
\begin{aligned}
I = \Big\{ & \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi e \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A}' \cos \frac{2\pi (e+e') \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A}'' \cos \frac{2\pi (e+e'+e'') \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi (2e+e'+e'' \ldots) \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A}' \cos \frac{2\pi (2e+2e'+e'' \ldots) \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \mathfrak{A} \cos \frac{2\pi (3e+2e'+2e'' \ldots) \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots \Big\}^2 \\
+ \Big\{ & \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi e \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A}' \sin \frac{2\pi (e+e') \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A}'' \sin \frac{2\pi (e+e'+e'') \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi (2e+e'+e'' \ldots) \sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi (2e+2e'+e'' \ldots) \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \mathfrak{A} \sin \frac{2\pi (3e+2e'+2e'' \ldots) \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots \Big\}^2,
\end{aligned}
$$

oder, wenn m Perioden und in jeder n Oeffnungen sind, in:

$$
\begin{aligned}
I = \Big\{ & \mathfrak{A} \frac{\sin \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \cos \pi\, [2e + (m-1)(e+e'+e'' \ldots e^{n})] \sin\vartheta\,\lambda^{-1} \\
& + \mathfrak{A}' \frac{\sin \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \cos \pi\, [2e + 2e' + (m-1)(e+e'+e'' \ldots e^{n})] \sin\vartheta\,\lambda^{-1} \\
& + \mathfrak{A}'' \frac{\sin \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \cos \pi\, [2e + 2e' + 2e'' + (m-1)(e+e'+e'' \ldots e^{n})] \sin\vartheta\,\lambda^{-1} \\
& + \ldots\ldots\ldots \Big\}^2 \\
+ \Big\{ & \mathfrak{A} \frac{\sin \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \sin \pi\, [2e + (m-1)(e+e'+e'' \ldots e^{n})] \sin\vartheta\,\lambda^{-1} \\
& + \mathfrak{A}' \frac{\sin \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \sin \pi\, [2e + 2e' + (m-1)(e+e'+e'' \ldots e^{n})] \sin\vartheta\,\lambda^{-1} \\
& + \mathfrak{A}'' \frac{\sin \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \sin \pi\, [2e + 2e' + 2e'' + (m-1)(e+e'+e'' \ldots e^{n})] \sin\vartheta\,\lambda^{-1} \\
& + \ldots\ldots\ldots \Big\}^2 \\
= \; & \frac{\sin^2 \pi m (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin^2 \pi (e+e'+e'' \ldots e^{n}) \sin\vartheta\,\lambda^{-1}} \Big\{ \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{A}''^2 + \ldots \\
& + 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}' \cos \frac{\pi . 2e' \sin\vartheta}{\lambda} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}'' \cos \frac{\pi (2e'+2e'') \sin\vartheta}{\lambda} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{A}''' \cos \frac{\pi (2e'+2e''+2e''') \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + 2\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' \cos \frac{\pi . 2e'' \sin\vartheta}{\lambda} + 2\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''' \cos \frac{\pi (2e''+2e''') \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + 2\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''' \cos \frac{\pi . 2e''' \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots \Big\}^2. \quad (16)
\end{aligned}
$$

8. Erscheinungen durch gleiche Oeffnungen in meheren parallelen Reihen.

Man lege OX senkrecht gegen die Richtungslinie der parallelen Reihen, so sind die Coordinaten der ersten Reihe: α gemeinsam und a', a'', a''' ...., die Coordinaten der zweiten Reihe β gemeinsam und b', b'', b''' ...., der dritten γ gemeinsam und c', c'', c''' .... u. s. w.; ferner ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \ldots.$ Somit erhält man aus der Gleichung (14):

$$I = \mathfrak{A}^2 \Big\{\cos\frac{2\pi(a'\cos x - \alpha\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \cos\frac{2\pi(a''\cos x - \alpha\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \cos\frac{2\pi(a'''\cos x - \alpha\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \ldots,$$
$$+ \cos\frac{2\pi(b'\cos x - \beta\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \cos\frac{2\pi(b''\cos x - \beta\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \ldots,$$
$$+ \cos\frac{2\pi(c'\cos x - \gamma\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \ldots,$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}^2$$
$$+ \mathfrak{A}^2 \Big\{\sin\frac{2\pi(a'\cos x - \alpha\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \sin\frac{2\pi(a''\cos x - \alpha\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \sin\frac{2\pi(a'''\cos x - \alpha\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \ldots,$$
$$+ \sin\frac{2\pi(b'\cos x - \beta\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \sin\frac{2\pi(b''\cos x - \beta\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \ldots,$$
$$+ \sin\frac{2\pi(c'\cos x - \gamma\sin x)\sin\vartheta}{\lambda} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}^2. \quad (17)$$

Zur weitern Vereinfachung dieser Gleichung sollen die Oeffnungen noch nach einer zweiten Richtung, welche die erste unter dem Winkel ν schneidet, zu einander parallel sein, und in den erstern Reihen um gleich viel, um e von einander abstehen; dann ist $a'' = a' + e$, $a''' = a' + 2e$, ..., $b' = a' + (\beta - \alpha)\operatorname{cotg}\nu$, $b'' = b' + e$, $b''' = b' + 2e$, ..., $c' = a' + 2(\beta - \alpha)\operatorname{cotg}\nu$, $c'' = c' + e$, ...; sind in der ersten Reihe n', in der zweiten n'' .... Oeffnungen, so folgt aus (17):

$$I = \mathfrak{A}^2 \Big\{\frac{\sin\pi n' e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin\pi e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}\cos\pi[2a'\cos x - 2\alpha\sin x + n'e\cos x]\sin\vartheta\,\lambda^{-1}$$
$$+ \frac{\sin\pi n'' e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin\pi e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}\cos\pi[(2a' + 2(\beta-\alpha)\operatorname{cotg}\nu)\cos x - 2\beta\sin x + n''e\cos x]\sin\vartheta\,\lambda^{-1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}^2$$
$$+ \mathfrak{A}^2 \Big\{\frac{\sin\pi n' e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin\pi e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}\sin\pi[2a'\cos x - 2\alpha\sin x + n'e\cos x]\sin\vartheta\,\lambda^{-1}$$
$$+ \frac{\sin\pi n'' e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}{\sin\pi e\cos x\sin\vartheta\,\lambda^{-1}}\sin\pi[(2a' + 2(\beta-\alpha)\operatorname{cotg}\nu)\cos x - 2\beta\sin x + n''e\cos x]\sin\vartheta\,\lambda^{-1}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}^2. \quad (18)$$

Um einen speciellen Fall durchzuführen, seien vier gleiche kreisrunde Oeffnungen gegeben, deren Mittelpuncte **1, 2, 3, 4** ein Quadrat (Fig. 13.) von der Seite e bilden. Wir setzen den Anfangspunct der Coordinaten in **1**, legen OX längst **1.3**, so haben wir $\alpha = 0$, $\beta = e$, $n' = n'' = 2$, $a' = 0$ und $\operatorname{cotang} \nu = 0$: also aus (18):

$$I = \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 2\pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} \left\{ \left[\cos \frac{2\pi e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \cos \frac{2\pi (e \cos x - e \sin x) \sin\vartheta}{\lambda} \right]^2 + \left[\sin \frac{2\pi e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \sin \frac{2\pi (e \cos x - e \sin x) \sin\vartheta}{\lambda} \right]^2 \right\}$$

$$= \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 2\pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} \cdot \frac{\sin^2 2\pi e \sin x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi e \sin x \sin\vartheta \lambda^{-1}}. \quad (19)$$

Hiernach wird $I = 0$, wenn

entweder $\mathfrak{A} = 0$

oder $\dfrac{\sin 2\pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} = 0$

oder $\dfrac{\sin 2\pi e \sin x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} = 0$ ist.

Wegen $\mathfrak{A} = 0$ entstehen dieselben dunklen concentrischen Ringe, welche ein Kreis allein hervorbringt. Der Factor $\dfrac{\sin 2\pi \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} = 0$ giebt nach den vorigen Erörterungen dunkle Linien senkrecht zu **1.2** in Abständen vom Mittelpuncte $= \pm \frac{L\lambda}{2e} = \pm \frac{3L\lambda}{2e} = \pm \frac{5L\lambda}{2e} = \ldots.$ Hierzu kommen von $\dfrac{\sin 2\pi e \sin x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin \pi e \sin x \sin\vartheta \lambda^{-1}} = 0$ neue dunkle Linien senkrecht zu **1.3** gleichfalls in Abständen vom Mittelpuncte $= \pm \frac{L\lambda}{2e} = \pm \frac{3L\lambda}{2e} = \pm \frac{5L\lambda}{2e} = \ldots.$

Die entworfene Zeichnung hat übrigens eine allgemeine Gültigkeit, so oft gleich viele Oeffnungen in wechselseitig parallelen Reihen gleichmäfsig vertheilt stehen. Die Minima hängen immer von drei einzelnen Factoren ab; der erste liefert eine Figur der Minima, wie sie eine von den Oeffnungen allein erzeugen würde, die beiden anderen geben dunkle Linien senkrecht zu den Richtungen der parallelen Reihen. Sind nämlich nach der einen Richtung n Oeffnungen um e von einander entfernt, nach der andern m Oeffnungen um ε von einander abstehend, so ist $\alpha = 0$, $a' = 0$, $a'' = e$, $a''' = 2e$, ... $\beta = \varepsilon \sin\nu$, $b' = \varepsilon \cos\nu$, $b'' = \varepsilon \cos\nu + e$, ... $\gamma = 2\varepsilon \sin\nu$, $c' = 2\varepsilon \cos\nu$, $c'' = 2\varepsilon \cos\nu + e$, ..., und aus (18) wird:

$$I = \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 \pi n e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} \left\{ \cos \frac{\pi n e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \cos \frac{\pi [n e \cos x + 2\varepsilon \cos(\nu + x)] \sin\vartheta}{\lambda} + \cos \frac{\pi [n e \cos x + 4\varepsilon \cos(\nu + x)] \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \right\}^2$$

$$+ \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 \pi n e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} \left\{ \sin \frac{\pi n e \cos x \sin\vartheta}{\lambda} + \sin \frac{\pi [n e \cos x + 2\varepsilon \cos(\nu + x)] \sin\vartheta}{\lambda} + \sin \frac{\pi [n e \cos x + 4\varepsilon \cos(\nu + x)] \sin\vartheta}{\lambda} + \ldots \right\}^2$$

$$= \mathfrak{A}^2 \frac{\sin^2 \pi n e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi e \cos x \sin\vartheta \lambda^{-1}} \cdot \frac{\sin^2 \pi m \varepsilon \cos(\nu + x) \sin\vartheta \lambda^{-1}}{\sin^2 \pi \varepsilon \cos(\nu + x) \sin\vartheta \lambda^{-1}} \quad (20)$$

Die Entwicklung dieses Ausdrucks ist ähnlich mit den Formeln beim Parallelogramm und bestätigt die obigen Angaben.

9. Erscheinungen durch den Zwischenraum zweier concentrischen Quadrate.

Damit wir zum Schlusse wenigstens ein Beispiel von einer andern Anordnung der Oeffnungen als nach Reihen geben, falle das Licht durch den Zwischenraum der beiden concentrischen Quadrate $ABCD$ und $abcd$ (Fig. 14.), deren Seiten $= N$ und n seien. Man theile den Raum in die vier Rechtecke $FBHC$, $EFab$, $cdGH$, $AEDG$: lege die Coordinatenaxe OX durch den Mittelpunct von $abcd$, parallel zu BC, so sind die Coordinaten $\alpha = 0$, $a = -\frac{N+n}{4}$; $\beta = \frac{N+n}{4}$, $b = 0$; $\gamma = -\frac{N+n}{4}$, $c = 0$; $\delta = 0$ und $d = \frac{N+n}{4}$. Man bezeichne ferner die Intensität des auf den ganzen Zwischenraum $= Q$ fallenden Lichtes mit A^2, die Intensität der durch die Rechtecke $FBCH$ und $AEDG$ gebeugten Strahlen mit $\mathfrak{A}^2$, und endlich die Intensität der durch die beiden andern Rechtecke hindurchgehenden mit $\mathfrak{B}^2$. Die Gleichung (14) giebt hiernach

$$I = 4\left\{\mathfrak{A}\cos\frac{\pi\frac{N+n}{2}\cos x\sin\vartheta}{\lambda} + \mathfrak{B}\cos\frac{\pi\frac{N+n}{2}\sin x\sin\vartheta}{\lambda}\right\}^2.$$

Nach der Gleichung (7) ist

$$\mathfrak{A} = \frac{A\lambda^2}{\pi^2 Q\cos x\sin x\sin^2\vartheta}\sin\frac{\pi N\sin x\sin\vartheta}{\lambda}\sin\frac{\pi\frac{N-n}{2}\cos x\sin\vartheta}{\lambda},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{A\lambda^2}{\pi^2 Q\cos x\sin x\sin^2\vartheta}\sin\frac{\pi n\cos x\sin\vartheta}{\lambda}\sin\frac{\pi\frac{N-n}{2}\sin x\sin\vartheta}{\lambda},$$

also

$$I = A^2\left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 Q\cos x\sin x\sin^2\vartheta}\right)^2\left[\left(\sin\frac{\pi N\cos x\sin\vartheta}{\lambda} - \sin\frac{\pi n\cos x\sin\vartheta}{\lambda}\right)\sin\frac{\pi N\sin x\sin\vartheta}{\lambda}\right.$$
$$\left. + \left(\sin\frac{\pi N\sin x\sin\vartheta}{\lambda} - \sin\frac{\pi n\sin x\sin\vartheta}{\lambda}\right)\sin\frac{\pi n\cos x\sin\vartheta}{\lambda}\right]^2$$
$$= A^2\left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 Q\cos x\sin x\sin^2\vartheta}\right)^2\left\{\sin\frac{\pi N\cos x\sin\vartheta}{\lambda}\sin\frac{\pi N\sin x\sin\vartheta}{\lambda}\right.$$
$$\left. - \sin\frac{\pi n\sin x\sin\vartheta}{\lambda}\sin\frac{\pi n\cos x\sin\vartheta}{\lambda}\right\}^2. \quad (21)$$

C. Beugungserscheinungen in beliebiger Entfernung hinter dem Schirme bei divergirend auffallenden Strahlen.

Wenn der leuchtende Punct in meſsbarer Entfernung vorm Schirme liegt, und man den Effect der gebeugten Strahlen an einer beliebigen Stelle hinter demselben sucht, bietet die Berechnung gröſsere Schwierigkeiten dar, und gewährt nur in wenigen Fällen eine vollständige Lösung der Aufgabe; im Allgemeinen muſs man sich damit begnügen, die Lage der Maxima und Minima zu bestimmen, die jedoch, wie bekannt, eine vorzügliche Wichtigkeit für die Bestätigung der Theorie haben. Um

die hierher gehörigen Beobachtungen anzustellen, concentrirt man einfarbiges oder weifses Licht mittelst einer kleinen Linse im Fensterladen des dunklen Zimmers zu einem Lichtpuncte, setzt in den sich verbreitenden Strahlenkegel den Schirm ein, und beobachtet an einer beliebigen Stelle hinter demselben mit einer etwas gröfseren Loupe, vor welcher man bei genauern Messungen ein feines Haar in der Brennweite ausgespannt hat. Wie schon oben bemerkt ist, hat Fresnel für die wichtigsten Fälle genaue Messungen ausgeführt und sie auf eine mühsame, aber sinnreiche Weise berechnet. Ich werde dem von ihm eingeschlagenen Gange folgen und nur einen bequemeren Weg zur Bestimmung der Maxima und Minima hinzufügen, der jedoch, obschon selbst auf kreisrunde Oeffnungen anwendbar, für welche aufser den allgemeinern Angaben von Herschel genauere Messungen fehlen, leider nicht überall auf die Oerter sämmtlicher Maxima und Minima hinführt.

1. Erscheinungen längst der Kante eines dunklen Schirmes.

Das Licht gehe vom leuchtenden Puncte A (Fig. 15.) aus und BC stelle den Durchschnitt des dunklen Schirmes dar; man suche die Intensität des Lichtes in dem beliebig angenommenen Punct E. Die einfallende Welle CH wird bei C vom Schirm unterbrochen, und gilt von hier ab, wo noch alle Stellen in ihr eine gleiche Intensität besitzen, als erzeugende Welle. Man ziehe nun von A nach E durch F, von A über C nach D, bis $AD = AE$ wird, setze $AC = a$, $CD = b$ und Bogen $FG = z$, so ist der Weg des beliebig gewählten Strahles durch $G = AG + GE =$

$$AG + \sqrt{(AE^2 + AG^2 - 2AG \,.\, AE \cos FAG)} = a + \sqrt{\left((a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b)\cos\frac{a}{z}\right)}.$$

Allein z bleibt bei diesen Beobachtungen immer so klein, dafs man die höheren Potenzen über z^2 vernachlässigen kann; daher wird der Weg des Strahles durch $G = a + \sqrt{\left((a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) + \frac{(a+b)z^2}{a}\right)}$

$= a + \sqrt{\left(b^2 + \frac{a(+b)z^2}{a}\right)} = a + b + \frac{(a+b)z^2}{2ab}$, und so entsteht nach §. II. (4) die Gleichung für die Intensität des Lichtes in E, wenn A^2 die Intensität desselben in jedem Elemente der ursprünglichen Welle bedeutet:

$$I = \left(\int A\,dz \cos\frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right)^2 + \left(\int A\,dz \sin\frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right)^2, \qquad (22)$$

integrirt von $z = 0$ bis $z = \infty$, und von $z = 0$ bis $z = CF = z$.

Setzt man $\frac{\pi(a+b)z^2}{2b\lambda} = \frac{1}{2}\pi v^2 = qv^2$ und $dz = dv\sqrt{\left(\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\right)}$, so ist

$$I = A^2\left(\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\right)\left[\left(\int dv \cos qv^2\right)^2 + \left(\int dv \sin qv^2\right)^2\right],$$

integrirt von $v = 0$ bis $v = \infty$, und von $v = 0$ bis $v = v\sqrt{\left(\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\right)}$.

Der erste Theil des Integrals von $v = 0$ bis ∞ giebt $\int dv \cos qv^2 = \frac{1}{2}$ und ebenso $\int dv \sin qv^2 = \frac{1}{2}$, der andere Theil dagegen läfst sich nur in einer Reihe oder durch partielle Integrationen bestimmen. Zu dem letztern Behufe nehme man für v die so sehr genäherten Grenzen i und $i + t$, dafs man t^2 vernachlässigen kann, dann ist

$$\int dv \cos q v^2 = \int dt \cos q\,(i+t)^2, \text{ integrirt von } t=0 \text{ bis } =t,$$

$$= \int dt \cos q\,(i^2+2it) = \frac{1}{2qi}\,[\sin qi\,(i+2t) - \sin qi^2];$$

und auf dieselbe Weise

$$\int dv \sin q v^2 = \int dt \sin q\,(i^2+2it) = \frac{1}{2qi}\,[-\cos qi\,(i+2t) + \cos qi^2].$$

Nach diesen Formeln hat Fresnel die beiden Integrale von 9 zu 9 Graden für v berechnet, und die überhaupt resultirenden Intensitäten abgeleitet. Die entworfene Tabelle reicht die genäherten Grenzen für die Maxima und Minima dar; um sie noch genauer zu finden, sei nach der Tabelle für $v=i$

$$\left[\tfrac{1}{2} + \int dv \cos q v^2\right] = I \quad \text{und} \quad \left[\tfrac{1}{2} + \int dv \sin q v^2\right] = Y;$$

dann wird die Intensität für $v = i+t$

$$\left[I + \frac{1}{2qi}\,[\sin qi\,(i+2t) + \sin qi^2]\right]^2 + \left[Y + \frac{1}{2qi}\,[-\cos qi\,(i+2t) + \cos qi]^2\right]^2$$

und das Differentizial nach $t=0$ gesetzt, giebt die genauern Werthe der Maxima und Minima; also

$$0 = \left[I + \frac{1}{2qi}\,[\sin qi\,(i+2t) + \sin qi^2]\right] \cos qi(i+2t)$$

$$+ \left[Y + \frac{1}{2qi}\,[-\cos qi\,(i+2t) + \cos qi^2]\right] \sin qi\,(i+2t)$$

oder

$$\operatorname{tang} qi\,(i+2t) = \frac{\sin qi^2 - 2qiI}{2qiY + \cos qi^2}.$$

Bezeichnet man diese Werthe von v für die Maxima und Minima allgemein mit n, so ist $z = v\sqrt{\left(\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\right)} = n\sqrt{\left(\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\right)}$. Fresnel hat bei seinen Beobachtungen die Abstände der Minima von der Projection der Schattenkante des Schirms gemessen, also die Linie DE, wenn in E ein Minimum ist. Da aber $DE:EF = DA:CA$, so ist $DE = \frac{(a+b)z}{a} = \frac{(a+b)}{a}\,n\sqrt{\left(\frac{ab\lambda}{2(a+b)}\right)}$ $= n\sqrt{\left(\frac{(a+b)b\lambda}{2a}\right)}$. Nach dieser Formel hat man die Tafelwerthe n noch mit $\sqrt{\left(\frac{(a+b)b\lambda}{2a}\right)}$ zu multipliciren, um zu den besondern Messungen die entsprechenden Werthe nach der Theorie zu erhalten.

Die Oerter der Maxima und Minima findet man durch Anwendung der Integration nach Reihen auf leichtere Weise. Wir setzen $\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} = L$, und erhalten von $z=0$ bis $z=z$ integrirt

$$\int dz \cos Lz^2$$

$$= z\cos Lz^2 + \frac{2Lz^3}{1.3}\sin Lz^2 - \frac{(2L)^2z^5}{1.3.5}\cos Lz^2 - \frac{(2L)^3z^7}{1.3.5.7}\sin Lz^2 + \frac{(2L)^4z^9}{1.3.5.7.9}\cos Lz^2 + \ldots$$

$$= \left(z - \frac{(2L)^2z^5}{1.3.5} + \frac{(2L)^4z^9}{1.3.5.7.9} - \ldots\ldots\right)\cos Lz^2$$

$$+ \left(\frac{2Lz^3}{1.3} - \frac{(2L)^3z^7}{1.3.5.7} + \frac{(2L)^5z^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\ldots\right)\sin Lz^2$$

$$= M\cos Lz^2 + N\sin Lz^2,$$

wenn M und N die vorstehenden Reihen der Kürze wegen bedeuten. Ebenso

$$\int dz \sin Lz^2 = z \sin Lz^2 - \frac{2Lz^3}{1.3}\cos Lz^2 - \frac{(2L)^2 z^5}{1.3.5}\sin Lz^2 + \frac{(2L)^3 z^7}{1.3.5.7}\cos Lz^2 + \frac{(2L)^4 z^9}{1.3.5.7.9}\sin Lz^2 - \ldots.$$

$$= \left(z - \frac{(2L)^2 z^5}{1.3.5} + \frac{(2L)^4 z^9}{1.3.5.7.9} - \ldots..\right)\sin Lz^2 - \left(\frac{2Lz^3}{1.3} - \frac{(2L)^3 z^7}{1.3.5.7} + \frac{(2L)^5 z^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \ldots..\right)\cos Lz^2$$

$$= M \sin Lz^2 - N \cos Lz^2.$$

Hiernach wird

$$I = A^2 \left(\int dz \cos Lz^2\right)^2 + A^2 \left(\int dz \sin Lz^2\right)^2$$

$$= A^2 [M \cos Lz^2 + N \sin Lz^2 + \text{Const.}]^2 + [M \sin Lz^2 - N \cos Lz^2 + \text{Const.}]^2,$$

und $\frac{dI}{dz} = 0$ giebt

$$0 = [M\cos Lz^2 + N \sin Lz^2 + \text{Const.}]\left(\frac{dM}{dz}\cos Lz^2 - 2Lz\, M \sin Lz^2 + \frac{dN}{dz}\sin Lz^2 + 2LzN\cos Lz^2\right) + [M \sin Lz^2 - N\cos Lz^2 + \text{Const.}]\left(\frac{dM}{dz}\sin Lz^2 + 2Lz\, M \cos Lz^2 - \frac{dN}{dz}\cos Lz^2 + 2Lz\, N \sin Lz^2\right).$$

Wegen der Reihen, die M und N bezeichnen, ist aber $\frac{dM}{dz} = 1 - 2LzN$; $\frac{dN}{dz} = 2LzM$, folglich durch Substitution dieser Werthe

$$0 = [M \cos Lz^2 + N \sin Lz^2 + \text{Const.}] \cos Lz^2 + [M \sin Lz^2 - N \cos Lz^2 + \text{Const.}] \sin Lz^2,$$

oder

$$0 = M + \text{Const.} (\cos Lz^2 + \sin Lz^2). \qquad (23)$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn $\cos Lz^2 + \sin Lz^2 = 0$ oder $\cos Lz^2 = -\sin Lz^2$ ist, da bei diesen Werthen von Lz^2 auch die Reihe $M = 0$ wird. Somit sind die Bedingungsgleichungen für die Oerter der Maxima

$$Lz^2 = \frac{\pi(a+b)z^2}{ab\lambda} = \frac{3}{4}\pi = \frac{11}{4}\pi = \frac{19}{4}\pi = \frac{27}{4}\pi = \ldots.$$

und für die Oerter der Minima

$$Lz^2 = \frac{\pi(a+b)z^2}{ab\lambda} = \frac{7}{4}\pi = \frac{15}{4}\pi = \frac{23}{4}\pi = \frac{31}{4}\pi = \ldots.$$

Diese Gleichungen auf die Fresnelschen Messungen übertragen, findet man für die Maxima

$$DE = 2\sqrt{(0{,}375)}\sqrt{\left(\frac{(a+b)b\lambda}{2a}\right)} = 2\sqrt{(1{,}375)}\sqrt{\left(\frac{(a+b)b\lambda}{2a}\right)} = 2\sqrt{(2{,}375)}\sqrt{\left(\frac{(a+b)b\lambda}{2a}\right)} = \ldots.$$

und für die Minima

$$DE = 2\sqrt{(0,875)}\sqrt{\left(\frac{(a+b)\,b\lambda}{2a}\right)} = 2\sqrt{(1,875)}\sqrt{\left(\frac{(a+b)\,b\lambda}{2a}\right)}$$
$$= 2\sqrt{(2,875)}\sqrt{\left(\frac{(a+b)\,b\lambda}{2a}\right)} = \ldots.$$

Der Factor $\sqrt{\left(\frac{(a+b)\,b\lambda}{2a}\right)}$ ist derselbe, wie oben bei Fresnel, daher sind die veränderlichen Factoren $2\sqrt{(0,375)}$, $2\sqrt{(0,875)}$, ... seine Tafelwerthe n.

Die folgende Tabelle giebt n der Maxima und Minima, und zugleich die Intensitäten nach der Formel $\left(\int d\nu \cos q\nu^2\right)^2 + \left(\int d\nu \sin q\nu^2\right)^2$.

		Nach Fresnel.	Intensität.
1 Max.	$2\sqrt{(0,375)} = 1,224745$	1,2172	2,7413
1 Min.	$2\sqrt{(0,875)} = 1,870829$	1.8726	1,5570
2 Max.	$2\sqrt{(1,375)} = 2,345208$	2,3449	2,3990
2 Min.	$2\sqrt{(1,875)} = 2,738612$	2,7392	1,6867
3 Max.	$2\sqrt{(2,375)} = 3,082207$	3,0820	2,3022
3 Min.	$2\sqrt{(2,875)} = 3,391166$	3,3913	1,7440
4 Max.	$2\sqrt{(3,375)} = 3,674235$	3,6742	2,2523
4 Min.	$2\sqrt{(3,875)} = 3,937004$	3,9372	1,7783
5 Max.	$2\sqrt{(4,375)} = 4,183300$	4;1832	2,2206
5 Min.	$2\sqrt{(4,875)} = 4,415980$	4,4160	1,8014
6 Max.	$2\sqrt{(5,375)} = 4,636819$	4,6369	2,1985
6 Min.	$2\sqrt{(5,875)} = 4,847680$	4,8479	1,8185
7 Max.	$2\sqrt{(6,375)} = 5,049752$	5,0500	2,1818
7 Min.	$2\sqrt{(6,875)} = 5,244044$	5,2442	1,8317

Die Tabelle zeigt, daſs nicht nur die Maxima und Minima immer enger an einander rücken, sondern daſs sich auch der Unterschied ihrer Intensitäten fortwährend vermindert, wodurch sie schnell genug unkenntlich werden. Aus diesen Gründen sind genauere Messungen nur bei einfarbigem Lichte auszuführen. Als Beispiel geben wir einige von Fresnels Messungen an orangefarbenem Lichte, dessen Wellenlänge $\lambda = 0^{mm},000638$ gefunden ward.

1ste Reihe $a = 0^m,1000$; $b = 0^m,7985$.			2te Reihe $a = 0^m,1985$; $b = 0^m,637$			20ste Reihe $a = 3^m,018$; $b = 3^m,995$		
	beob.	berechn.		beob.	berechn.		beob.	berechn.
1 Min.	$2^{mm},84$	$2^{mm},83$	1 Min.	$1^{mm},73$	$1^{mm},73$	1 Min.	$3^{mm},19$	$3^{mm},22$
2 Min.	4,14	4,14	2 Min.	2,54	2,53	2 Min.	4,70	4,71
3 Min.	5,14	5,13	3 Min.	3,14	3,14	3 Min.	5,83	5,84
4 Min.	5,96	5,96	4 Min.	3,65	3,64	4 Min.	6,73	6,77
5 Min.	6,68	6,68	5 Min.	4,06	4,08	5 Min.	7,58	7,60

2. Erscheinungen durch eine enge Spalte.

Es sei $GBCF$ (Fig. 16.) der Durchschnitt des dunklen Schirmes, und BC dessen Spalte $= \gamma$. Von A aus komme einfarbiges Licht; es wird bis auf den Bogen BC vom Schirme zurückgehalten, und dieser ist mit seiner Intensität $= A^2$ die erzeugende Welle für alle Stellen hinter dem Schirme. Nach einem Puncte E aufserhalb der Spaltenprojection hat der beliebige Strahl durch H einen Weg $= AH + HE$ zu durchlaufen; setzt man wieder $AO = a$, $OD = b$, Bogen $IC = \zeta$, Bogen $IH = z$, so ist

$$AH + HE = a + \sqrt{\left(a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b)\cos\frac{z}{a}\right)},$$

oder mit Uebergehung der höheren Potenzen als z^2,

$$AH + HE = a + b + \frac{(a+b)z^2}{2ab},$$

folglich die resultirende Intensität in $E =$

$$I = \left(\int \frac{A\,dz}{\gamma} \cos\frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right)^2 + \left(\int \frac{A\,dz}{\gamma} \sin\frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right)^2$$
$$= \left(\int \frac{A\,dz}{\gamma} \cos Lz^2\right)^2 + \left(\int \frac{A\,dz}{\gamma} \sin Lz^2\right)^2$$

integrirt von $z = \zeta$ bis $z = IB = z$.

Entweder berechnet man diese Formel mit Fresnel nach partiellen Integralen, ein hier ziemlich mühsamer Weg, oder man sucht die Maxima und Minima durch die Integration nach Reihen zu bestimmen. Dann ist

$$\int dz \cos Lz^2 = z\cos Lz^2 + \frac{2Lz^3}{1.3}\sin Lz^2 - \frac{(2L)^2z^5}{1.3.5}\cos Lz^2 - \frac{(2L)^3z^7}{1.3.5.7}\sin Lz^2 + \ldots\ldots$$
$$- \zeta\cos L\zeta^2 + \frac{2L\zeta^3}{1.3}\sin L\zeta^2 + \frac{(2L)^2\zeta^5}{1.3.5}\cos L\zeta^2 + \frac{(2L)^3\zeta^7}{1.3.5.7}\sin L\zeta^2 - \ldots\ldots$$
$$= \left(z - \frac{(2L)^2z^5}{1.3.5} + \frac{(2L)^4z^9}{1.3.5.7.9} - \ldots\right)\cos Lz^2$$
$$+ \left(\frac{2Lz^3}{1.3} - \frac{(2L)^3z^7}{1.3.5.7} + \frac{(2L)^5z^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\right)\sin Lz^2$$
$$- \left(\zeta - \frac{(2L)^2\zeta^5}{1.3.5} + \frac{(2L)^4\zeta^9}{1.3.5.7.9} - \ldots\right)\cos L\zeta^2$$
$$- \left(\frac{2L\zeta^3}{1.3} - \frac{(2L)^3\zeta^7}{1.3.5.7} + \frac{(2L)^5\zeta^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\right)\sin L\zeta^2$$
$$= M\cos Lz^2 + N\sin Lz^2 - O\cos L\zeta^2 - P\sin L\zeta^2,$$

indem M, N, O, P die vorstehenden Reihen der Folge nach bedeuten. Ebenso

$$\int dz \sin Lz^2 = z \sin Lz^2 - \frac{2Lz^3}{1.3}\cos Lz^2 - \frac{(2L)^2 z^5}{1.3.5}\sin Lz^2 + \frac{(2L)^3 z^7}{1.3.5.7}\cos Lz^2 + \ldots\ldots$$

$$- \zeta \sin L\zeta^2 + \frac{2L\zeta^3}{1.3}\cos L\zeta^2 + \frac{(2L)^2\zeta^5}{1.3.5}\sin L\zeta^2 - \frac{(2L)^3\zeta^7}{1.3.5.7}\cos L\zeta^2 - \ldots\ldots$$

$$= \left(z - \frac{(2L)^2 z^5}{1.3.5} + \frac{(2L)^4 z^9}{1.3.5.7.9} - \ldots\right)\sin Lz^2$$

$$- \left(\frac{2L^2 z^3}{1.3} - \frac{(2L)^3 z^7}{1.3.5.7} + \frac{(2L)^5 z^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\right)\cos Lz^2$$

$$- \left(\zeta - \frac{(2L)^2\zeta^5}{1.3.5} + \frac{(2L)^4\zeta^9}{1.3.5.7.9} - \ldots\right)\sin L\zeta^2$$

$$+ \left(\frac{2L\zeta^3}{1.3} - \frac{(2L)^3\zeta^7}{1.3.5.7} + \frac{(2L)^5\zeta^{11}}{1.3.5.7.9.11} - \ldots\right)\cos L\zeta^2$$

$$= M \sin Lz^2 - N\cos Lz^2 - O\sin L\zeta^2 + P\cos L\zeta^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$I = A^2\left[\frac{M\cos Lz^2 + N\sin Lz^2 - O\cos L\zeta^2 - P\sin L\zeta^2}{\gamma}\right]^2$$
$$+ A^2\left[\frac{M\sin Lz^2 - N\cos Lz^2 - O\sin L\zeta^2 + P\cos L\zeta^2}{\gamma}\right]^2,$$

und $\frac{dI}{dz} = \frac{dI}{d\zeta} = 0$, weil $dz = d\zeta$ ist, giebt

$$0 = [M\cos Lz^2 + N\sin Lz^2 - O\cos L\zeta^2 - P\sin L\zeta^2]\Big[\frac{dM}{dz}\cos Lz^2 - 2LzM\sin Lz^2$$
$$+ \frac{dN}{dz}\sin Lz^2 + 2LzN\cos Lz^2 - \frac{dO}{d\zeta}\cos L\zeta^2 + 2L\zeta O\sin L\zeta^2 - \frac{dP}{d\zeta}\sin L\zeta^2 - 2L\zeta P\cos L\zeta^2\Big]$$
$$+ [M\sin Lz^2 - N\cos Lz^2 - O\sin L\zeta^2 + P\cos L\zeta^2]\Big[\frac{dM}{dz}\sin Lz^2 + 2LzM\cos Lz^2 - \frac{dN}{dz}\cos Lz^2$$
$$+ 2LzN\sin Lz^2 - \frac{dO}{d\zeta}\sin L\zeta^2 - 2L\zeta O\cos Lz^2 - \frac{dP}{d\zeta}\cos L\zeta^2 + 2L\zeta P\sin L\zeta^2\Big].$$

Da aber wieder

$$\frac{dM}{dz} = 1 - 2LzN;\quad \frac{dN}{dz} = 2LzM;\quad \frac{dO}{d\zeta} = 1 - 2L\zeta P;\quad \frac{dP}{d\zeta} = 2L\zeta O \text{ ist,}$$

so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf

$$0 = [M\cos Lz^2 + N\sin Lz^2 - O\cos L\zeta^2 - P\sin L\zeta^2][\cos Lz^2 - \cos L\zeta^2]$$
$$+ [M\sin Lz^2 - N\cos Lz^2 - O\sin L\zeta^2 + P\cos L\zeta^2][\sin Lz^2 - \sin L\zeta^2]$$

oder auf

$$0 = M + O - M\cos L(z^2-\zeta^2) - O\cos L(z^2-\zeta^2) - N\sin L(z^2-\zeta^2) + P\sin L(z^2-\zeta^2).$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, entweder wenn

$$\cos L(z^2-\zeta^2) = 1 \quad\text{und}\quad \sin L(z^2-\zeta^2) = 0, \quad (24)$$

oder wenn

$$\operatorname{tang}\frac{L(z^2-\zeta^2)}{2} = \frac{N-P}{M+O} \text{ ist.} \quad (25)$$

Nur aus der erstern Bedingungsgleichung lassen sich ohne weitläufige Tabellen die Oerter der Maxima oder Minima bestimmen; wir wollen daher auf diese allein Rücksicht nehmen, und uns im Uebrigen mit den Fresnelschen Berechnungen begnügen. Nach der erstern Gleichung ist aber

$$L(z^2-\zeta^2)=\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda}(z^2-\zeta^2)=0=2\pi=4\pi=6\pi=\ldots.$$

und

$$DE=\frac{(a+b)(\zeta+\frac{1}{2}\gamma)}{a}=\frac{(a+b)\gamma(\zeta+\frac{1}{2}\gamma)b\lambda}{\gamma.ab\lambda}=\frac{(a+b)(z-\zeta)(\zeta+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\zeta)b\lambda}{\gamma.ab\lambda}$$

$$=\frac{(a+b)(z^2-\zeta^2)b\lambda}{\gamma.2ab\lambda}=0=\frac{b\lambda}{\gamma}=\frac{2b\lambda}{\gamma}=\frac{3b\lambda}{\gamma}=\ldots.$$

Es liege zweitens E noch innerhalb der Spaltenprojection, so ist die Gleichung

$$I=\left(\int\frac{A\,dz}{\gamma}\cos Lz^2\right)^2+\left(\int\frac{A\,dz}{\gamma}\sin Lz^2\right)^2$$

von $z=-\zeta$ bis $z=z$ zu integriren, und man erhält

$$I=A^2\left(\frac{M\cos Lz^2+N\sin Lz^2+O\cos L\zeta^2+P\sin L\zeta^2}{\gamma}\right)^2$$

$$+A^2\left(\frac{M\sin Lz^2-N\cos Lz^2+O\sin L\zeta^2-P\cos L\zeta^2}{\gamma}\right)^2.$$

Aus $dI=0$ folgt wegen $dz=-d\zeta$

$$0=\left\{M\cos Lz^2+N\sin Lz^2+O\cos L\zeta^2+P\sin L\zeta^2\right\}\left[\frac{dM}{dz}\cos Lz^2-2Lz\,M\sin Lz^2\right.$$

$$\left.+\frac{dN}{dz}\sin Lz^2+2Lz\,N\cos Lz^2-\frac{dO}{d\zeta}\cos L\zeta^2+2L\zeta\,O\sin L\zeta^2-\frac{dP}{d\zeta}\sin L\zeta^2-2L\zeta P\cos L\zeta^2\right]$$

$$+\left\{M\sin Lz^2-N\cos Lz^2+O\sin L\zeta^2-P\cos L\zeta^2\right\}\left[\frac{dM}{dz}\sin Lz^2+2Lz\,M\cos Lz^2\right.$$

$$\left.-\frac{dN}{dz}\cos Lz^2+2Lz\,N\sin Lz^2-\frac{dO}{d\zeta}\sin L\zeta^2-2L\zeta\,O\cos L\zeta^2+\frac{dP}{d\zeta}\cos L\zeta^2-2L\zeta P\sin L\zeta^2\right]$$

oder

$$0=\left\{M\cos Lz^2+N\sin Lz^2+O\cos L\zeta^2+P\sin L\zeta^2\right\}\left[\cos Lz^2-\cos L\zeta^2\right]$$

$$+\left\{M\sin Lz^2-N\cos Lz^2+O\sin L\zeta^2-P\cos L\zeta^2\right\}\left[\sin Lz^2-\sin L\zeta^2\right]$$

oder

$$0=M-O-M\cos L(z^2-\zeta^2)+O\cos L(z^2-\zeta^2)-N\sin L(z^2-\zeta^2)-P\sin L(z^2-\zeta^2).$$

Auch diese Gleichung giebt zwei Bedingungsgleichungen für die Maxima und Minima,

entweder $\cos L(z^2-\zeta^2)=1$ und $\sin L(z^2-\zeta^2)=0$

oder $\operatorname{tang}\frac{L(z^2-\zeta^2)}{2}=\frac{N+P}{M-O}$.

Die erstere führt auf

$$L(z^2-\zeta^2)=\frac{\pi(a+b)}{ab\lambda}(z^2-\zeta^2)=0=2\pi=4\pi=6\pi=\ldots.$$

und

$$DE=\frac{(a+b)(z-\frac{1}{2}\gamma)}{a}=\frac{(a+b)\gamma(z-\frac{1}{2}\gamma)b\lambda}{\gamma.ab\lambda}=\frac{(a+b)(z+\zeta)(z-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\zeta)b\lambda}{\gamma.ab\lambda}$$

$$=\frac{(a+b)(z^2-\zeta^2)b\lambda}{\gamma.2ab\lambda}=0=\frac{b\lambda}{\gamma}=\frac{2b\lambda}{\gamma}=\frac{3b\lambda}{\gamma}=\ldots.$$

Obschon die eben gefundenen einfachen Reihen für DE Oerter der Maxima und Minima geben, so können sie doch für eine von diesen Klassen nicht allein in Anspruch genommen werden, weil in der Mitte der Spaltenprojection, also bei $DE = 0$, sowohl ein Maximum als Minimum vorkommen kann. Ja, entfernt man sich nach und nach immer weiter vom Schirme, so erlangt die Mitte abwechselnd Maxima und Minima, die man zum Unterschiede von den frühern absolute Maxima und Minima nennen mag. Diese zu finden, integrire man die Gleichung der Intensität von $-z$ bis z, so ist

$$I = \frac{4A^2}{\gamma^2}(M^2 + N^2);$$

nehme $\frac{dI}{dz} = 0$, so bekommt man

$$0 = M;$$

also stehen nach dem bei der Beugung längst der Schirmkante Gesagten die absoluten Maxima in der Mitte der Oeffnung unter der Formel

$$\frac{(a+b)z^2}{ab\lambda} = 0{,}75 = 2{,}75 = 4{,}75 = \ldots.$$

und die absoluten Minima unter der Formel

$$\frac{(a+b)z^2}{ab\lambda} = 1{,}75 = 3{,}75 = 5{,}75 = \ldots.$$

Vergleicht man übrigens die vorher gefundenen Werthe von DE mit Fresnels Messungen, so bestimmen sie meistens die Minima, namentlich im Schatten des Schirmes. Man sehe

Beob. 1. $a = 2^{m},010$; $b = 0^{m},617$; $\gamma = 0^{mm},50$; $\frac{b\lambda}{\gamma} = 0{,}787292$;

	beob.	ber. v. Fr.	ber. nach der Formel:
1 Min.	$0^{mm},77$	$0^{mm},79$	$0^{mm},79$
2 Min.	1,58	1,58	1,57

Beob. 2. $a = 2^{m},010$; $b = 1^{m},503$; $\gamma = 1^{mm},00$; $\frac{b\lambda}{\gamma} = 0{,}958914$;

1 Min.	$0^{mm},86$	$0^{mm},97$	$0^{mm},96$
2 Min.	1,88	1,92	1,92

Beob. 3. $a = 2^{m},010$; $b = 0^{m},401$; $\gamma = 1^{mm},00$; $\frac{b\lambda}{\gamma} = 0{,}255838$;

1 Min.	$0^{mm},16$	$0^{mm},14$	—
2 Min.	0,48	0,51	0,51
3 Min.	0,76	0,77	0,77
4 Min.	1,01	1,02	1,02
5 Min.	1,28	1,28	1,28

Beob. 4. $a = 3^{m},008$; $b = 1^{m},236$; $\gamma = 2^{mm},00$; $\frac{b\lambda}{\gamma} = 0{,}394284$;

1 Min.	$0^{mm},00$	$0^{mm},00$	$0^{mm},00$ (absol. Min.)
2 Min.	0,63	0,67	—
3 Min.	1,11	1,18	1,18
4 Min.	1,53	1,59	1,58
5 Min.	1,96	1,96	1,97

3. Erscheinungen hinter einem schmalen dunklen Körper.

Setzt man einen schmalen dunklen Körper, z. B. einen Drath in den sich verbreitenden Lichtkegel, so müssen, wenn E noch im Schatten liegt, die Integrale in der oben gegebenen Gleichung der Intensität von $z = z$ bis $z = \infty$, und von $z = \zeta$ bis $z = \infty$ genommen werden, wobei $z + \zeta = \gamma$ den Durchmesser des Drathes angiebt. Liegt dagegen E aufserhalb des Schattens, so integrirt man von $z = -z$ bis $z = \infty$ und von $z = \zeta$ bis $z = \infty$, und hat $\zeta - z = \gamma$. Für die Oerter der Maxima und Minima wird man auf die beiden vorigen Bedingungsgleichungen zurückkommen, von denen man auch hier die erstere prüfen könnte, wenn vollständigere Messungen vorlägen; bis jetzt ist es natürlicher, Fresnel's Tabelle durch partielle Integrationen zu benutzen. Seine Beobachtungen und Berechnungen geben:

Beob. 1. $a = 5^m,049$; $b = 0^m,615$; $\gamma = 0^{mm},78$.		
1 Min.	beob.	ber.
Innere Bande 1.	$0^{mm},23$	$0^{mm},21$
4 Min.		
Aeufsere B. 1.	1,30	1,30
5 Min.		
Aeufsere B. 2.	1,72	1,73

Beob. 2. $a = 3^m,047$; $b = 1^m,213$; $\gamma = 1^{mm},236$.		
1 Min.	beob.	ber.
Innere Bande 1.	$0^{mm},27$	$0^{mm},27$
2 Min.		
Innere B. 2.	0,81	0,78
6 Max.		
Aeufsere B. 2.	2,64	2,64

Beob. 3. $a = 6^m,598$; $b = 0^m,553$; $\gamma = 1^{mm},322$.		
3 Min.		
Innere Bande 3.	$0^{mm},63$	$0^{mm},62$
5 Min.		
Innere Bande 5.	1,10	1,05

Beob. 4. $a = 0^m,778$; $b = 0^m,553$; $\gamma = 1^{mm},322$.		
3 Min.		
Innere Bande 3	$0^{mm},65$	$0^{mm},65$
5 Min.		
Innere Bande 5.	1,16	1,13

4. Erscheinungen durch eine kreisrunde Oeffnung.

Als den letzten Fall der zu dieser Klasse gehörigen Beugungserscheinungen nehmen wir eine kreisrunde Oeffnung im dunklen Schirme. Man kann hier die Intensität der gebeugten Strahlen an jeder beliebigen Stelle hinter der Mitte der Oeffnung berechnen. Es sei nämlich C (Fig. 17.) der Mittelpunct des Kreises, der leuchtende Punct befinde sich in A, und man suche die Intensität in E, in der Verlängerung von AC. Den Radius $CB = r$, $CF = z$, $\angle FCB = \varphi$, $CA = a$, $CE = b$ gesetzt, hat der beliebig angenommene Strahl durch F von A bis E einen Weg $= AF + FE = a + b + \frac{(a+b)z^2}{2ab}$ zurückzulegen; das Kreiselement bei F ist $= z\,dz\,d\varphi$, folglich ist die gesammte Intensität in E, wenn die Intensität der auf den ganzen Kreis auffallenden Strahlen A^2 beträgt, $=$

$$I = \left\{\iint \frac{A}{r^2\pi} z\,dz\,d\varphi \cos\frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right\}^2 + \left\{\iint \frac{A}{r^2\pi} z\,dz\,d\varphi \sin\frac{2\pi(a+b)z^2}{2ab\lambda}\right\}^2,$$

integrirt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und von $z = 0$ bis $z = r$.

Also

$$I = \left\{\int \frac{A 2 z\,dz}{r^2} \cos \frac{\pi(a+b) z^2}{ab\lambda}\right\}^2 + \left\{\int \frac{A 2 z\,dz}{r^2} \sin \frac{\pi(a+b) z^2}{ab\lambda}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{A a b \lambda}{r^2 \pi(a+b)} \sin \frac{\pi(a+b) r^2}{ab\lambda}\right\}^2 + \left\{\frac{A a b \lambda}{r^2 \pi(a+b)} \cos \frac{\pi(a+b) r^2}{ab\lambda} - \frac{A a b \lambda}{r^2 \pi(a+b)}\right\}^2$$

$$= A^2 \left(\frac{2 a b \lambda}{r^2 \pi(a+b)}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi(a+b) r^2}{2ab\lambda}. \quad (26)$$

Nach dieser Gleichung liegen die Maxima der Intensität

$$\text{bei } \frac{\pi(a+b) r^2}{2ab\lambda} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} = \ldots.$$

und die Minima

$$\text{bei } \frac{\pi(a+b) r^2}{2ab\lambda} = \pi = 2\pi = 3\pi = 4\pi = \ldots.$$

Bei Anwendung von weifsem Lichte folgen sich die Farben des Centrums bei wachsendem b wegen der ungleichen Werthe von λ meist in der Reihe der Neutonschen Farbenringe. Denn nimmt man zur Abkürzung der Rechnung $a = \infty$ an, so erhält man für die Oerter der Maxima

$$b = \frac{r^2}{\lambda} = \frac{r^2}{3\lambda} = \frac{r^2}{5\lambda} = \ldots.$$

Die Fraunhoferschen Strahlen B, C, D, E, F, G, H haben aber dieser Reihe nach eine Wellenlänge $\lambda = 0^{p.Z.}$,00002541; 0,00002425; 0,00002175; 0,00001943; 0,00001789; 0,00001585; 0,00001451; daraus ergiebt sich b oder die Entfernung der Maxima jeder Farbe hinter dem Schirme in paris. Zollen folgendermafsen:

H 1	Max.	$68965\,r^2$	B 1	Max.	$39355\,r^2$	C 2	Max.	$13746\,r^2$	C 3	Max.	$8275\,r^2$
G 1	—	$63091\,r^2$	H 2	—	$22988\,r^2$	B 2	—	$13118\,r^2$	F 4	—	$7985\,r^2$
F 1	—	$55897\,r^2$	G 2	—	$21030\,r^2$	G 3	—	$12618\,r^2$	B 3	—	$7871\,r^2$
E 1	—	$51467\,r^2$	F 2	—	$18632\,r^2$	F 3	—	$11179\,r^2$	H 5	—	$7663\,r^2$
D 1	—	$45977\,r^2$	E 2	—	$17156\,r^2$	E 3	—	$10293\,r^2$	E 4	—	$7352\,r^2$
C 1	—	$41237\,r^2$	D 2	—	$15326\,r^2$	H 4	—	$9852\,r^2$	G 5	—	$7013\,r^2$
			H 3	—	$13793\,r^2$	D 3	—	$9195\,r^2$	D 4	—	$6568\,r^2$
						G 4	—	$9013\,r^2$	H 6	—	$6270\,r^2$

Also werden nur ein Paar Perioden hindurch die Farben des Centrums wie im Sonnenspectrum selbst auf einander folgen.

Die Gleichung (26) für die Intensität in der Mitte der Oeffnung ist völlig bestimmt, dagegen unterliegt die Berechnung der Intensität an jeder beliebigen Stelle hinter der kreisrunden Oeffnung bedeutenden Schwierigkeiten und kann nur durch die weitläufigsten Tabellen gewonnen werden. Das folgende Verfahren, obschon auch umständlich, giebt wenigstens eine leicht zu lösende Bedingungsgleichung für die Maxima und Minima und leistet dasselbe, was die oben gefundenen Werthe für die Maxima und Minima bei engen Spalten gewährten. Die Oeffnung sei der Kreis um C (Fig. 18.), der leuchtende Punct ist in A und E die Stelle, an welcher die Intensität bestimmt werden soll. AE gehe bei B durch die erzeugende Welle, ein anderer beliebiger Strahl sei AFE. Man nenne $AC = a$, $HC = b$, $CG = r$, $CF = z$, $CB = f$, $\angle FCB = \varphi$, verlängere FC bis D, dafs $CD = CF$ wird, dann findet man

$$AF+FE=a+b+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{(a+b)(z^2+f^2)}{2ab}-\frac{(a+b)fz\cos\varphi}{ab}\right\},$$

und

$$AD+DE=a+b+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{(a+b)(z^2+f^2)}{2ab}+\frac{(a+b)fz\cos\varphi}{ab}\right\}.$$

Die gemeinsame Schwingung dieser durch die beiden Kreiselemente bei F und D hindurchgehenden Strahlen ist nach §. II. (3) =

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{A}{r^2\pi}z\,dz\,d\varphi\sin\left\{\frac{2\pi(a+b)(z^2+f^2)}{2ab\lambda}-\frac{2\pi(a+b)fz\cos\varphi}{ab\lambda}\right\}\\ &+\frac{A}{r^2\pi}z\,dz\,d\varphi\sin\left\{\frac{2\pi(a+b)(z^2+f^2)}{2ab\lambda}+\frac{2\pi(a+b)fz\cos\varphi}{ab\lambda}\right\}\\ &=\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\,d\varphi\cos\frac{2\pi(a+b)fz\cos\varphi}{ab\lambda}\sin\frac{\pi(a+b)(z^2+f^2)}{ab\lambda}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die gesammte Intensität des gebeugten Lichtes in E:

$$\begin{aligned}I&=\left\{\iint\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\,d\varphi\cos\frac{2\pi(a+b)fz\cos\varphi}{ab\lambda}\cos\frac{\pi(a+b)(z^2+f^2)}{ab\lambda}\right\}^2\\ &+\left\{\iint\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\,d\varphi\cos\frac{2\pi(a+b)fz\cos\varphi}{ab\lambda}\sin\frac{\pi(a+b)(z^2+f^2)}{ab\lambda}\right\}^2\end{aligned}$$

integrirt von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi$ und von $z=0$ bis $z=r$.

Der Kürze wegen sei $\dfrac{2\pi(a+b)f}{ab\lambda}=F$ und $\dfrac{\pi(a+b)}{ab\lambda}=L$, so ist

$$\begin{aligned}I&=\left\{\iint\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\,d\varphi\cos(Fz\cos\varphi)\cos L(z^2+f^2)\right\}^2\\ &+\left\{\iint\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\,d\varphi\cos(Fz\cos\varphi)\sin L(z^2+f^2)\right\}^2\\ &=\left\{\iint\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\cos L(z^2+f^2)\,d\varphi\left(1-\frac{F^2z^2\cos^2\varphi}{1.2}+\frac{F^4z^4\cos^4\varphi}{1.2.3.4}-\frac{F^6z^6\cos^6\varphi}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right)\right\}^2\\ &+\left\{\iint\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\sin L(z^2+f^2)\,d\varphi\left(1-\frac{F^2z^2\cos^2\varphi}{1.2}+\frac{F^4z^4\cos^4\varphi}{1.2.3.4}-\frac{F^6z^6\cos^6\varphi}{1.2.3.4.5.6}+\ldots\right)\right\}^2\\ &=\left\{\int\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\cos L(z^2+f^2)\pi\left(1-\frac{F^2z^2}{2^2}+\frac{F^4z^4}{(2.4)^2}-\frac{F^6z^6}{(2.4.6)^2}+\ldots\right)\right\}^2\\ &+\left\{\int\frac{A}{r^2\pi}2z\,dz\sin L(z^2+f^2)\pi\left(1-\frac{F^2z^2}{2^2}+\frac{F^4z^4}{(2.4)^2}-\frac{F^6z^6}{(2.4.6)^2}+\ldots\right)\right\}^2.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int 2z\,dz\cos L(z^2+f^2)=\frac{1}{L}\sin L(r^2+f^2)-\frac{1}{L}\sin Lf^2$$

$$\int 2z^3\,dz\cos L(z^2+f^2)=\frac{r^2}{L}\sin L(r^2+f^2)+\frac{1}{L^2}\cos L(r^2+f^2)-\frac{1}{L^2}\cos Lf^2$$

$$\int 2z^5\,dz\cos L(z^2+f^2)=\frac{r^4}{L}\sin L(r^2+f^2)+\frac{2r^2}{L^2}\cos L(r^2+f^2)-\frac{2}{L^3}\sin L(r^2+f^2)+\frac{2}{L^3}\sin Lf^2$$

$$\int 2z^7\,dz\cos L(z^2+f^2)=\frac{r^6}{L}\sin L(r^2+f^2)+\frac{3r^4}{L^2}\cos L(r^2+f^2)-\frac{3\,2r^2}{L^3}\sin L(r^2+f^2)-\frac{3.2}{L^4}\cos L(r^2+f^2)+\frac{3.2}{L}\cos Lf^2$$

u. s. w.

und

$$\int 2z\,dz \sin L(z^2+f^2) = -\frac{1}{L}\cos L(r^2+f^2) + \frac{1}{L}\cos Lf^2$$

$$\int 2z^3\,dz \sin L(z^2+f^2) = -\frac{r^2}{L}\cos L(r^2+f^2) + \frac{1}{L^2}\sin L(r^2+f^2) - \frac{1}{L^2}\sin Lf^2$$

$$\int 2z^5\,dz \sin L(z^2+f^2) = -\frac{r^4}{L}\cos L(r^2+f^2) + \frac{2r^2}{L^2}\sin L(r^2+f^2) + \frac{2}{L^3}\cos L(r^2+f^2) - \frac{2}{L^3}\cos Lf^2$$

$$\int 2z^7\,dz \sin L(z^2+f^2) = -\frac{r^6}{L}\cos L(r^2+f^2) + \frac{3r^4}{L^2}\sin L(r^2+f^2) + \frac{3.2r^2}{L^3}\cos L(r^2+f^2) - \frac{3.2}{L^4}\sin L(r^2+f^2) + \frac{3.2}{L^4}\sin Lf^2$$

u. s. w.

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung für I, und setzt $\frac{F}{L} = 2f$ oder $F = 2fL$, so bekommt man

$$I = \left(\frac{A}{r^2}\right)^2 \Big\{ \frac{1}{L}\sin(r^2+f^2) - \frac{1}{L}\sin Lf^2 - \frac{(2f)^2 L r^2}{2^2}\sin L(r^2+f^2) - \frac{(2f)^2}{2^2}\cos L(r^2+f^2) + \frac{(2f)^2}{2^2}\cos Lf^2 + \frac{(2f)^4 L^3 r^4}{(2.4)^2}\sin L(r^2+f^2) + \frac{2.(2f)^4 L^2 r^2}{(2.4)^2}\cos L(r^2+f^2) - \frac{2.(2f)^4 L}{(2.4)^2}\sin L(r^2+f^2) + \frac{2.(2f)^4 L}{(2.4)^2}\sin Lf^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}^2$$

$$+ \left(\frac{A}{r^2}\right)^2 \Big\{ -\frac{1}{L}\cos L(r^2+f^2) + \frac{1}{L}\cos Lf^2 + \frac{(2f)^2 L r^2}{2^2}\cos L(r^2+f^2) - \frac{(2f)^2}{2^2}\sin L(r^2+f^2) + \frac{(2f)^2}{2^2}\sin Lf^2 - \frac{(2f)^4 L^3 r^4}{(2.4)^2}\cos L(r^2+f^2) + \frac{2.(2f)^4 L^2 r^2}{(2.4)^2}\sin L(r^2+f^2) + \frac{2.(2f)^4 L}{(2.4)^2}\cos L(r^2+f^2) - \frac{2.(2f)^4 L}{(2.4)^2}\cos Lf^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}^2$$

$$= \left(\frac{A}{Lr^2}\right)^2 \Big\{\sin L(r^2+f^2) - \sin Lf^2$$

$$- \frac{Lf^2\, Lr^3}{1^2} \sin L(r^2+f^2) - \frac{Lf^2}{1^2} \cos L(r^2+f^2) + \frac{Lf^2}{1^2} \cos Lf^2$$

$$+ \frac{(Lf^2)^2\,(Lr^2)^2}{(1.2)^2} \sin L(r^2+f^2) + \frac{2.(Lf^2)^2\, Lr^2}{(1.2)^2} \cos L(r^2+f^2)$$

$$- \frac{2.(Lf^2)^2}{(1.2)^2} \sin L(r^2+f^2) + \frac{2.(Lf^2)^2}{(1.2)^2} \sin Lf^2$$

$$- \frac{(Lf^2)^3\,(Lr^2)^3}{(1.2.3)} \sin L(r^2+f^2) - \frac{3(Lf^2)^3\,(Lr^2)^2}{(1.2.3)^2} \cos L(r^2+f^2)$$

$$+ \frac{3.2(Lf^2)^3\, Lr^2}{(1.2.3)^2} \sin L(r^2+f^2) + \frac{3.2(Lf^2)^3}{(1.2.3)^2} \cos L(r^2+f^2)$$

$$- \frac{3.2\,(Lf^2)^3}{(1.2.3)^2} \cos Lf^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}^2.$$

$$+ \left(\frac{A}{Lr^2}\right)^2 \Big\{- \cos L(r^2+f^2) + \cos Lf^2$$

$$+ \frac{Lf^2.Lr^2}{1^2} \cos L(r^2+f^2) - \frac{Lf^2}{1^2} \sin L(r^2+f^2) + \frac{Lf^2}{1^2} \sin Lf^2$$

$$- \frac{(Lf^2)^2\,(Lr^2)^2}{(1.2)^2} \cos L(r^2+f^2) + \frac{2(Lf^2)^2\, Lr^2}{(1.2)^2} \sin L(r^2+f^2)$$

$$+ \frac{2(Lf^2)^2}{(1.2)^2} \cos L(r^2+f^2) - \frac{2(Lf^2)^2}{(1.2)^2} \cos Lf^2$$

$$+ \frac{(Lf^2)^3\,(Lr^2)^3}{(1.2.3)^2} \cos L(r^2+f^2) - \frac{3(Lf^2)^3\,(Lr^2)^2}{(1.2.3)^2} \sin L(r^2+f^2)$$

$$- \frac{3.2(Lf^2)^3\, Lr^2}{(1.2.3)^2} \cos L(r^2+f^2) + \frac{3.2(Lf^2)^3}{(1.2.3)^2} \sin L(r^2+f^2)$$

$$- \frac{3.2(Lf^2)^3}{(1.2.3)^2} \sin Lf^2$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}^2.$$

Diese Gleichung unter die Form

$$I = \left(\frac{A}{Lr^2}\right)^2 M^2 + \left(\frac{A}{Lr^2}\right)^2 N^2$$

gesetzt, giebt $\frac{dI}{df} = 0$ die Oerter der Maxima oder Minima. Also

$$0 = M\frac{dM}{df} + N\frac{dN}{df}.$$

Man findet aber

$$\frac{dM}{df} = -2Lf \sin L(r^2+f^2) \Big\{\frac{Lr^2}{1} - \frac{Lf^2\,(Lr^2)^2}{1.2} + \frac{(Lf^2)^2(Lr^2)^3}{(1.2)^2.3} - \frac{(Lf^2)^3\,(Lr^2)^4}{(1.2.3)^2.4} + \ldots\Big\}$$

und

$$\frac{dN}{df} = 2Lf \cos L(r^2+f^2) \Big\{\frac{Lr^2}{1} - \frac{Lf^2\,(Lr^2)^2}{1.2} + \frac{(Lf^2)^2(Lr^2)^3}{(1.2)^2\,3} - \frac{(Lf^2)^3\,(Lr^2)^4}{(1.2.3)^2.4} + \ldots\Big\},$$

folglich

$$0 = \{M \sin L(r^2+f^2) - N \cos L(r^2+f^2)\} \left\{1 - \frac{(Lrf)^2}{1.2} + \frac{(Lrf)^4}{(1.2)^2.3} - \frac{(Lrf)^6}{(1.2.3)^2.4} + \ldots\right\}. \quad (27)$$

Also sind die Bedingungsgleichungen für die Maxima und Minima

$$0 = M \sin L(r^2+f^2) - N \cos L(r^2+f^2) \quad \text{und}$$

$$0 = 1 - \frac{(Lrf)^2}{1.2} + \frac{(Lrf)^4}{(1.2)^2.3} - \frac{(Lrf)^6}{(1.2.3)^2.4} + \ldots.$$

Die Lösung der erstern Gleichung erfordert sehr weitläufige Tabellen, die Reihe der zweiten dagegen stimmt ganz mit der Reihe (13) überein, wenn man Lrf oder $\frac{\pi(a+b)rf}{ab\lambda}$ = dem dortigen $\frac{\pi r \sin\vartheta}{\lambda}$ setzt. Somit erhält man Oerter der Maxima oder Minima

$$\text{bei } \frac{\pi(a+b)rf}{ab\lambda} = 109^\circ,8 = 200^\circ,9 = 291^\circ,4 = 381^\circ,6 = 466^\circ,8 = \ldots,$$

$$\text{oder bei } f = \frac{109,8}{180}\cdot\frac{ab\lambda}{(a+b)r} = \frac{200,9}{180}\cdot\frac{ab\lambda}{(a+b)r} = \frac{291,4}{180}\cdot\frac{ab\lambda}{(a+b)r} = \frac{381,6}{180}\cdot\frac{ab\lambda}{(a+b)r} = \ldots,$$

$$\text{oder endlich bei } HE = \frac{109,8}{180}\cdot\frac{b\lambda}{r} = \frac{200,9}{180}\cdot\frac{b\lambda}{r} = \frac{291,4}{180}\cdot\frac{b\lambda}{r} = \frac{381,6}{180}\cdot\frac{b\lambda}{r} = \ldots.$$

D. Beugungserscheinungen vor dem Schirme.

Die dritte Abtheilung der Beugungserscheinungen umfaſst diejenigen Erscheinungen, welche durch die vom Schirme ab divergirend ausgehenden Strahlen bedingt sind; sie bestimmt also die Intensität der scheinbar von einem beliebigen Puncte vor dem Schirme ausgehenden Strahlen. Wie schon oben angedeutet wurde, eignen sich zu diesen Beobachtungen nur gewisse, immer sehr kleine Oeffnungen, weil man die Puncte, deren Intensität man berechnen will, in sehr naher Entfernung vor dem Schirme haben muſs, um nicht an die Erscheinungen mit parallelen Strahlen heranzustreifen. Am besten wählt man kleine kreisrunde Oeffnungen, stellt sie für ein nicht zu sehr vergröſserndes Microscop ein, leitet mittelst des Planspiegels durch eine kurze Röhre parallele oder zuvor durch eine Loupe zu einem Lichtpunct vereinigte Sonnenstrahlen gegen den dunklen Schirm und kann nun durch Näherstellen des Microscopes die Beugungserscheinungen vor dem Schirme wahrnehmen und messen. Es sei also $BDEF$ (Fig. 19.) der Durchschnitt des dunklen Schirmes, DE die kreisrunde Oeffnung, A der Lichtpunct und P die Stelle, deren von den divergirenden Strahlen abhängige Intensität bestimmt werden soll; dieses P liege in der Linie, welche von A nach dem Mittelpunct des Kreises O geht, um auf eine sichere Berechnung zu führen. Setzt man, wie früher, $AO = a$, $PO = b$ und $OE = r$, so hat der beliebige Strahl durch I, für welchen $OI = z$ und $\angle IOC = \varphi$ ist, bis zu dem willkürlichen um P als Centrum angenommenen Bogen ML einen Weg zurückzulegen $= AI + IL$ $= a + PL - PI = a + PL - \sqrt{\left(a^2 + (a-b)^2 - 2a(a-b)\cos\frac{z}{a}\right)} = a + PL - b - \frac{1}{2}\frac{(a-b)z^2}{ab}$, wenn man auch hier die höhern Potenzen als z^2 übergeht. Die Gröſse $a + PL - b$ ist für alle scheinbar von P ausgehenden Strahlen dieselbe, somit folgt nach §. II. (4) für die Intensität in P, diejenige der auf den ganzen Kreis auffallenden Strahlen $= A^2$ angenommen:

$$I = \left(\iint \frac{A\,z\,dz\,d\varphi}{r^2\pi} \cos\frac{\pi(a-b)z^2}{ab\lambda}\right)^2 + \left(\iint \frac{A\,z\,dz\,d\varphi}{r^2\pi} \sin\frac{\pi(a-b)z^2}{ab\lambda}\right)^2,$$

integrirt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ und von $z = 0$ bis $z = r$. Also

$$I = \left(\int \frac{2A\,z\,dz}{r^2} \cos\frac{\pi(a-b)z^2}{ab\lambda}\right)^2 + \left(\int \frac{2A\,z\,dz}{r^2} \sin\frac{\pi(a-b)z^2}{ab\lambda}\right)^2$$

$$= \left(\frac{A.2ab\lambda}{r^2\pi(a+b)}\right)^2 \sin^2\frac{\pi(a-b)r^2}{2ab\lambda}. \quad (28)$$

Nach dieser Gleichung ist $I = 0$ oder ein Minimum,

$$\text{wenn}\quad \frac{\pi(a-b)r^2}{2ab\lambda} = \pi = 2\pi = 3\pi = 4\pi = \ldots.,$$

und ein Maximum,

$$\text{wenn}\quad \frac{\pi(a-b)r^2}{2ab\lambda} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} = \ldots. \text{ ist.}$$

Daraus folgt weiter für die Maxima

$$b = \frac{ar^2}{a\lambda + r^2} = \frac{ar^2}{3a\lambda + r^2} = \frac{ar^2}{5a\lambda + r^2} = \ldots.$$

und für die Minima

$$b = \frac{ar^2}{2a\lambda + r^2} = \frac{ar^2}{4a\lambda + r^2} = \frac{ar^2}{6a\lambda + r^2} = \ldots.$$

Ist $a = \infty$, so erhält man

$$\text{für die Maxima } b = \frac{r^2}{\lambda} = \frac{r^2}{3\lambda} = \frac{r^2}{5\lambda} = \ldots.,$$

$$\text{für die Minima } b = \frac{r^2}{2\lambda} = \frac{r^2}{4\lambda} = \frac{r^2}{6\lambda} = \ldots.$$

Nach den Erörterungen über die Beugungserscheinungen hinter dem Schirme waren nach (26) hinter einer kreisrunden Oeffnung im Centrum die Maxima,

$$\text{wenn}\quad \frac{\pi(a+b)r^2}{2ab\lambda} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} = \ldots.$$

und die Minima,

$$\text{wenn}\quad \frac{\pi(a+b)r^2}{2ab\lambda} = \pi = 2\pi = 3\pi = 4\pi = \ldots. \text{ ist,}$$

$$\text{also für jene } b = \frac{ar^2}{a\lambda - r^2} = \frac{ar^2}{3a\lambda - r^2} = \frac{ar^2}{5a\lambda - r^2} = \ldots.,$$

$$\text{für diese } b = \frac{ar^2}{2a\lambda - r^2} = \frac{ar^2}{4a\lambda - r^2} = \frac{ar^2}{6a\lambda - r^2} = \ldots.$$

Ist $a = \infty$, so erhält man dieselben Werthe von b wie vorhin. Folgende Beobachtungen, die den hier statt findenden Umständen nach nur annähernde Resultate gewähren können, dienen zur Bestätigung der Theorie.

1. Beobachtungsreihe. Weifses Licht, $\lambda = 0,0002532$ par. Lin.; $a = \infty$.

r.	*b* vor und hinter dem Schirme. beob.		berechn.
0',007	1 Min.	0',09	0',09
0,016	1 Min.	0,51	0,51
	2 Min.	0,25	0,25
0,025	1 Min.	1,21	1,23
	2 Min.	0,64	0,62
1,042	2 Min.	1,70	1,74
	3 Min.	110,	1,16
0,045	2 Min.	2,02	2,00
	3 Min.	1,34	1,33

2. Beobachtungsreihe. Weifses Licht, $a = 10$ par. Linien. Als Wellenlängen der nachstehend genannten Farbestrahlen sind die Wellenlängen von Fraunhofers Strahlen *B, C, D, E, F, G, H* angenommen; $r = 0',0257$ (berechnet nach Beobachtungen auf die vorige Weise, welche die Durchmesser kleiner Kreise sehr genau bestimmen läfst).

Farbe des centralen Flecks		vor dem Schirme *b* beob.	vor dem Schirme *b* ber.	hinter dem Schirme *b* beob.	hinter dem Schirme *b* ber.
3 Max.	roth	0',43	0',42	0',47	0',45
	orange	0,46	0,44	0,50	0,48
	gelb	6,49	0,49	0,52	0,53
	grün	0,51	0,54	0,56	0,60
	blau	0,53	0,58	0,60	0,66
	dunkelblau . . .	0,58	0,65	0,67	0,74
	violett	0,62	0,69	0,71	0,82
2 Max.	roth	0,65	0,67	0,76	0,77
	orange	0,69	0,70	0,81	0,82
	gelb	0,75	0,77	0,88	0,92
	grün	0,81	0,86	0,99	1,04
	blau	0,96	0,93	1,18	1,15
	dunkelblau . . .	1,03	1,03	1,34	1,31
	violett	1,16	1,13	1,48	1,47
1 Max.	roth (doch mehr violett)	1,27	1,78	1,64	1,76
	orange	1,34	1,84	1,78	1,93
verschwindet als gelblich weifs.					

Die Differenzen der letztern Beobachtungsreihe beim Uebergange vom 3ten zum 2ten Maximum sind in den nicht zu vermeidenden Irrthümern begründet, wo die Farben, wie die Berechnung zeigt, über einander greifen. Den Beobachtungen des ersten Maximums liegt eine ebenfalls leicht zu erklärende Täuschung zum Grunde. Dies Wenige kann genügen über die Beugungserscheinungen der dritten Klasse

§. IV.

Von der Brechung und Zerstreuung des Lichtes.

1. Bei den bisherigen Untersuchungen blieb das Licht in ein und demselben Medium; es verbreitete sich entweder ungestört in demselben und erlitt dann nur, wie wir gesehen haben, eine nach dem Quadrate der Entfernung vom Lichtpuncte zunehmende Verminderung seiner Intensität, oder es ward theilweise durch einen dunklen Schirm aufgehalten und brachte die verschiedenen Beugungsphänomene hervor. Andere Verhältnisse treten auf, wenn das Licht von einem Medium in ein zweites übergeht, und dadurch der Einwirkung einer anderen Elasticität des Aethers ausgesetzt wird. Denn bewegt es sich wegen der stärkern oder geringern elastischen Kraft des einen Mediums schneller oder langsamer in demselben als in dem andern, und sollen dessen ungeachtet die zusammengehörigen Strahlen seines Wellensystemes auch in dem zweiten Medium, worin es übergeht, ein wiederum zusammengehöriges und mit dem ursprünglichen im Zusammenhange stehendes Wellensystem erzengen, was offenbar wenigstens für durchsichtige Körper der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte erfordert, so wird es beim Uebergange seine bisherige Richtung in der Regel nicht beibehalten können. Es folgt nämlich aus der Forderung nach einem Zusammenhange und Bestande der Wellensysteme in den beiden an einander stofsenden ungleichen Medien erstens, dafs die Schwingungen in beiden von gleicher Zeitdauer seien, damit eine Welle der andern regelmäfsig folge, zweitens dafs das neue Wellensystem eine solche Richtung einschlage, dafs die Schwingungen seiner Strahlen wiederum zu einer gemeinsamen Wellenebene zusammenstofsen. Man findet deshalb diese neue Wellenebene und durch sie die Richtung der darauf senkrechten Lichtstrahlen, wenn man diejenige Ebene sucht, bis zu welcher sämmtliche Strahlen von der ursprünglichen Wellenebene aus Wege von gleicher Zeitdauer zurückgelegt haben, um in ihr in gleichem Stadium der Schwingung zu sein. Ist nun AB (Fig. 20.) der Durchschnitt von der Trennungsebene beider Medien, LR ein Perpendikel darauf, CD die Richtung der aus dem ersten Medium einfallenden Strahlen, die dazu senkrechte CG ihre Wellenebene und $\angle GCF = \angle DCL = \vartheta$, so sei n das Verhältnifs der Lichtschnelligkeit im ersten Medium zum zweiten, FH die neue Wellenebene der Strahlen, ihre Richtung CI und $\angle HFC = \angle ICR = \vartheta'$; dann hat ein beliebiger Strahl SNT von einer Wellenebene zur andern den Weg $MN + NP$ zurückzulegen, der einen Zeitaufwand von $MN + nNP = NC(\sin\vartheta - n\sin\vartheta') + CF.n\sin\vartheta'$ erfordert. Sollen alle Strahlen bis zur Ebene FH einen in Bezug auf den Zeitaufwand gleichen Weg zurücklegen, damit sie sich in derselben in dem gleichen Stadium der Schwingung befinden, so besitzen sie darin, wenn anders kein Lichtverlust eintritt, dieselbe Intensität wie die einfallenden Strahlen, oder sollte ein Lichtverlust aus anderen Gründen unvermeidlich sein, doch wenigstens die gröfst-möglichste Intensität; man mufs also in der Gleichung nach §. II. (4):

$$I = \left(\int \frac{A\,dNC}{CF} \cos \frac{2\pi . NC(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}{\lambda}\right)^2 + \left(\int \frac{A\,dNC}{CF} \sin \frac{2\pi . NC(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}{\lambda}\right)^2,$$

welche von $NC = 0$ bis $NC = CF$ zu integriren ist, den gröfsten Werth von I bestimmen und daraus den Werth von ϑ' herleiten.

Also

$$I = \left(\frac{A\lambda}{CF.2\pi(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}\right)^2 \left\{\left(\sin\frac{2\pi.CF(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}{\lambda}\right)^2 + \left(1-\cos\frac{2\pi.CF(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}{\lambda}\right)^2\right\}$$

$$= \left(\frac{A\lambda}{\pi.CF(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}\right)^2 \sin^2\frac{\pi.CF(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}{\lambda}.$$

Nach dieser Formel erlangt I den gröfsten Werth, gegen den bei einem nur einigermafsen beträchtlichen CF alle übrigen gar keine Beachtung verdienen, wenn

$$\frac{\pi.CF(\sin\vartheta - n\sin\vartheta')}{\lambda} = 0 \text{ ist.}$$

Daraus folgt $\sin\vartheta - n\sin\vartheta' = 0$ oder allgemein die Bedingungsgleichung für die Richtung der gebrochenen Strahlen gegen die einfallenden:

$$\sin\vartheta' = \frac{1}{n}\sin\vartheta. \quad (1)$$

Das heifst: der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des gebrochenen Winkels in einem constanten Verhältnifs, welches von der Schnelligkeit des Lichtes in beiden Medien abhängt. — Das Gesetz der Brechung, dessen Herleitung wir unter die vorstehende Form gebracht haben, läfst sich noch auf andere Art begründen, obschon dadurch nur ein anderer Ausdruck derselben Grundbedingungen gewonnen wird. So kann man mit Fresnel die Bewegung der einfallenden Strahlen an der Trennungsfläche der beiden Medien abschliefsen, und von dort an aus jedem Puncte eine kugelförmige Welle construiren, die sich mit der durch das neue Medium bedingten Schnelligkeit ausbreitet. Nimmt man darauf die sämmtlichen Lichtkugeln zusammen und zieht zu ihnen eine gemeinsame tangirende Fläche, so ist diese die Wellenebene der gebrochenen Strahlen, weil in ihr allein die Schwingungen der sämmtlichen Lichtkugeln zusammentreffen. Es sei mHn eine solche Lichtkugel um C als den ersten Punct der Trennungsfläche, auf welchen die einfallenden Strahlen stofsen; F ist der letzte Punct derselben Fläche, und das einfallende Licht hat bis zu ihm noch einen Weg $= GF$ zurückzulegen; unterdessen ist der Radius der Lichtkugel um $C = HC = \frac{1}{n}GF$ geworden, und die tangirende Ebene geht von F gegen die Lichtkugel mHn, natürlich zu gleicher Zeit senkrecht gegen die gezeichnete Fläche. Da nun $GF = FC\sin\vartheta$ und $HC = FC\sin\vartheta'$ ist, so erhält man aus $HC = \frac{1}{n}GF$ die Gleichung $FC\sin\vartheta' = \frac{1}{n}FC\sin\vartheta$ oder $\sin\vartheta' = \frac{1}{n}\sin\vartheta$. — Ebenso kann man mit Cauchy die Grundbedingung stellen, dafs die neue Welle gleichmäfsig fortrücke, damit nirgends zwischen ihr und der alten eine Störung eintrete oder keine Lücke zwischen ihnen vorkomme. Schreitet die erste in einer bestimmten Zeit um den Weg FG fort, so mufs die neue den ihrer veränderten Schnelligkeit entsprechenden Weg $= HC = \frac{1}{n}FG$ zurückgelegt haben; denn auf diese Weise allein ist nirgends eine Unterbrechung, vielmehr überall ein stetiger Zusammenhang zwischen den beiden in gleichen Zeitabschnitten gleiche Schwingungen vollendenden Wellensystemen.

1. Der Factor $\frac{1}{n}$ in der die Brechung normirenden Gleichung $\sin\vartheta' = \frac{1}{n}\sin\vartheta$ ist von der physischen Beschaffenheit der beiden Medien abhängig und mufs durch besondere Versuche bestimmt werden. Am besten setzt man die Schnelligkeit des Lichtes im leeren Raume $= 1$, ermittelt unter dieser Voraussetzung die Schnelligkeit desselben in den übrigen Medien, und gewinnt für je zwei die Verhältnifszahl n durch eine einfache Rechnung. Doch auch bei denselben Medien bleibt der Factor $\frac{1}{n}$ nicht für die verschiedenen Farbestrahlen constant, vielmehr lehrt die Erfahrung, dafs diejenigen Strahlen, welche kleinere Wellenlängen besitzen, unter übrigens gleichen Verhältnissen stärker gebrochen werden als die, welche gröfsere Wellenlängen haben, also die violetten am stärksten, die rothen am schwächsten. Dieser Umstand giebt zur Zerstreuung des weifsen Lichtes Veranlassung.

Zur Erklärung der Sache nehmen wir die §. I. gefundene Relation zwischen s und k wieder auf, nämlich

$$s^2 = 2S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\sin^2\frac{k\Delta z}{2}\right\}, \quad (2)$$

in der $s = \frac{2\pi}{T}$ und $k = \frac{2\pi}{l}$ ist. T und l, die Zeitdauer und die Länge einer Lichtwelle, sind in demselben Medium constante Gröfsen, daher folgt

$$s^2 = 2S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\left(\frac{k\Delta z}{2} - \frac{(k\Delta z)^3}{2^3.2.3} + \frac{(k\Delta z)^5}{2^5.2.3.4.5} - \ldots\right)^2\right\}$$

$$= k^2 S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\cdot\frac{(\Delta z)^2}{2}\right\} - k^4 S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\cdot\frac{(\Delta z)^4}{2.3.4}\right\}$$

$$+ k^6 S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\cdot\frac{(\Delta z)^6}{2.3.4.5.6}\right\} - k^8 S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\cdot\frac{(\Delta z)^8}{2.3.4.5.6.7.8}\right\}$$

$$+ \ldots$$

$$= ak^2 - bk^4 + ck^6 - dk^8 + \ldots, \quad (3)$$

wenn man die unter den Summenzeichen enthaltenen im Allgemeinen unbestimmbaren Ausdrücke der Folge nach $a, b, c, d \ldots$ nennt. Ferner giebt (3)

$$s = k a^{\frac{1}{2}} - k^3\frac{\frac{1}{2}b}{a^{\frac{1}{2}}} + k^5\left(\frac{\frac{1}{2}c}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{8}b^2}{a^{\frac{3}{2}}}\right) - k^7\left(\frac{\frac{1}{2}d}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{4}bc}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{16}b^3}{a^{\frac{5}{2}}}\right) + \ldots;$$

setzt man hier der Kürze wegen

$$\mathfrak{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \mathfrak{b} = -\frac{\frac{1}{2}b}{a^{\frac{1}{2}}}; \quad \mathfrak{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{8}b^2}{a^{\frac{3}{2}}};$$

$$\mathfrak{d} = -\left(\frac{\frac{1}{2}d}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{4}bc}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{16}b^3}{a^{\frac{5}{2}}}\right); \ldots$$

von denen $\mathfrak{a}$ positiv, $\mathfrak{b}$ negativ, $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots$ je nach den Werthen $a, b, c, d \ldots$ positiv oder negativ sind, so folgt

$$s = \mathfrak{a}k + \mathfrak{b}k^3 + \mathfrak{c}k^5 + \mathfrak{d}k^7 + \ldots, \quad (4)$$

und durch Umkehrung der Reihe

$$k = \mathfrak{a}_1 s + \mathfrak{b}_1 s^3 + \mathfrak{c}_1 s^5 + \mathfrak{d}_1 s^7 + \ldots \quad (5)$$

worin
$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{1}{\mathfrak{a}}$$
$$\mathfrak{b}_1 = -\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^3}$$
$$\mathfrak{c}_1 = -\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c} + 3\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}^2 \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^5}$$
$$\mathfrak{d}_1 = -\frac{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{d} + 3\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}^2 \mathfrak{c} + 3\mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2 + 5\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}^4 \mathfrak{b}}{\mathfrak{a}^7}$$
. . . . ist.

Die ursprünglichen Werthe von a, b, c, d.... werden offenbar mit grofser Schnelligkeit kleiner, da die Summen mit den höhern Potenzen von Δz, einer sehr unbedeutenden Gröfse, sofern die nächst gelegenen Aetherteilchen allein auf die Schwingung eines andern einwirken, nur Glieder von sehr geringem Werthe enthalten. In demselben Maafse nehmen auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ ab, und grade dadurch macht es sich möglich, s nach den Potenzen von k und umgekehrt k nach den Potenzen von s in den obigen sehr convergirenden Reihen zu entwickeln. Nun ist aber die Schnelligkeit eines Strahls oder Ω bei gleicher Zeitdauer der Wellenlänge direct, bei gleicher Wellenlänge der Zeitdauer umgekehrt proportional, also
$$\Omega = \frac{l}{T} = \frac{s}{k},$$
oder
$$\frac{1}{\Omega} = \frac{T}{l} = \frac{k}{s}$$
$$= \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 s^2 + \mathfrak{c}_1 s^4 + \mathfrak{d}_1 s^6 + \dots.$$
$$= \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \mathfrak{c}_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 + \mathfrak{d}_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^6 + \dots.$$
$$= \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{T^2} + \frac{\mathfrak{C}}{T^4} + \frac{\mathfrak{D}}{T^6} + \dots, \quad (6)$$
wenn man noch $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 (2\pi)^2$; $\mathfrak{C} = \mathfrak{c}_1 (2\pi)^4$; $\mathfrak{D} = \mathfrak{d}_1 (2\pi)^6$; .... setzt.

Diese Gleichung giebt für $\frac{1}{\Omega}$ aufser dem constanten Werthe $\mathfrak{A}$ eine Reihe von Gliedern, die von T oder der Zeit, in welcher der besondere Farbestrahl seine Wellenlänge durchläuft, abhängig sind. Da die kürzesten Wellen die kürzeste Zeitdauer bedingen, so wird $\frac{1}{\Omega}$ von den rothen bis zu den violetten Strahlen zunehmen, oder umgekehrt Ω abnehmen, grade wie es die Erfahrung in der Zerstreuung des Lichtes lehrt. — Um aber zuerst die Schwingungsdauer der verschiedenen Farbestrahlen zu finden, die übrigens einmal gefunden durch alle Medien sich gleich bleibt, läfst sich kein anderer Weg einschlagen, als mittelst der Beugungserscheinungen oder anderer ähnlicher Phänomene die Wellenlängen der einzelnen Farbestrahlen im leeren Raume zu messen, und dazu die fast unwiderlegliche Annahme hinzuzufügen, dafs sich im leeren Raume die Wellenlängen mit der Zeitdauer der Schwingungen vollkommen oder wenigstens so nahe proportional verhalten, dafs der Unterschied über jede Messung hinausliegt. Fraunhofer hat diese Messungen auf das Genauste ausgeführt, und dazu die Strahlen B, C, D, E, F, G, H gewählt, die sich im Sonnenspectrum bekanntlich durch feste dunkle Linien sicher markiren. Hiernach ist die Wellenlänge von $B = 0{,}00002541$, von

$C = 0{,}00002425$, von $D = 0{,}00002175$; von $E = 0{,}00001943$, von $F = 0{,}00001789$, von $G = 0{,}00001585$ und von $H = 0{,}00001451$ par. Zoll. Bezeichnen wir wie früher diese Werthe allgemein mit λ, so können wir der Gleichung (6) die Form geben:

$$\frac{1}{\Omega} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{C}}{\lambda^4} + \frac{\mathfrak{D}}{\lambda^6} + \ldots \quad (7)$$

und nach ihr die Brechungsexponenten der obigen Strahlen in denjenigen Substanzen berechnen, welche ebenfalls Fraunhofer mit der gröfsten Sorgfalt und mit den besten Hülfsmitteln untersucht hat. Doch frägt sich, wie viele Glieder wir von der vorstehenden Gleichung berücksichtigen sollen; jedes führt eine neue unbekannte Gröfse herbei, und so könnte man, da die Brechungsexponenten von sieben Strahlen gegeben sind, sieben Glieder behalten und ganz genaue Resultate erlangen. Allein abgesehen von der Weitläufigkeit einer solchen Berechnung, würde sie überhaupt keinen andern Nutzen gewähren, als zu zeigen, dafs die Werthe der sich in der Formel folgenden Glieder, wie es sein mufs, immer kleiner werden, und dafs somit die Gleichung der richtige Ausdruck für $\frac{1}{\Omega}$ ist. Dasselbe leisten aber schon weniger Glieder; demnach habe ich zur folgenden Berechnung drei Glieder genommen, aus den Strahlen B, E, H die Gröfsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hergeleitet, und mittelst dieser Werthe die übrigen Strahlen berechnet. Die ziemlich genaue Uebereinstimmung der Berechnung mit den Beobachtungen, die selbst noch gröfser sein könnte, wären zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auch die übrigen Strahlen hinzugenommen, giebt einen schönen Beweis für die Richtigkeit der Theorie, welche auf eine so vollkommen passende Gleichung in aller Strenge führt.

	Wasser. 1ster Versuch.			Wasser. 2ter Versuch.	
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,330935	1,330935	B	1,330977	1,330977
C	1,331712	1,331634	C	1,331709	1,331673
D	1,333577	1,333506	D	1,333577	1,333524
E	1,335851	1,335851	E	1,335849	1,335849
F	1,337818	1,337859	F	1,337788	1,337848
G	1,341293	1,341293	G	1,341261	1,341274
H	1,344177	1,344177	H	1,344162	1,344162
	$\mathfrak{A} = 1{,}323382$			$\mathfrak{A} = 1{,}323530$	

	Auflösung von Potasche.			Terpenthinöl.	
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,399629	1,399629	B	1,470496	1,470496
C	1,400515	1,400477	C	1,471530	1,471566
D	1,402805	1,402764	D	1,474434	1,474504
E	1,405632	1,405632	E	1,478353	1,478353
F	1,408082	1,408149	F	1,481736	1,481795
G	1,412579	1,412553	G	1,488198	1,488093
H	1,416368	1,416368	H	1,493874	1,493874
	$\mathfrak{A} = 1{,}390747$			$\mathfrak{A} = 1{,}459737$	

	Crownglas No. 9. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		Crownglas No. 13. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		Crownglas M. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,525832	1,525832	*B*	1,524312	1,524312	*B*	1,554774	1,554774
C	1,526849	1,526822	*C*	1,525299	1,525281	*C*	1,555933	1,555918
D	1,529587	1,529522	*D*	1,527982	1,527940	*D*	1,559075	1,559058
E	1,533005	1,533005	*E*	1,531372	1,531372	*E*	1,563150	1,563150
F	1,536052	1,536091	*F*	1,534337	1,534397	*F*	1,566741	1,566804
G	1,541657	1,541623	*G*	1,539908	1,539824	*G*	1,573535	1,573477
H	1,546566	1,546566	*H*	1,544684	1,544684	*H*	1,579470	1,579470
	$\mathfrak{A}$ = 1,515651			$\mathfrak{A}$ = 1,514269			$\mathfrak{A}$ = 1,543170	

	Flintglas No. 23. 1ster Versuch. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		Flintglas No. 23. 2ter Versuch. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		Flintglas No. 3. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,626596	1,626596	*B*	1,626564	1,626564	*B*	1,602042	1,602042
C	1,628469	1,628460	*C*	1,628451	1,628438	*C*	1,603800	1,603721
D	1,633667	1,633621	*D*	1,633666	1,633644	*D*	1,608494	1,608369
E	1,640495	1,640495	*E*	1,640544	1,640544	*E*	1,614532	1,614532
F	1,646756	1,646779	*F*	1,646780	1,646852	*F*	1,620042	1,620147
G	1,658848	1,658586	*G*	1,658849	1,658627	*G*	1,630772	1,630598
H	1,669686	1,669686	*H*	1,669680	1,669680	*H*	1,640373	1,640373
	$\mathfrak{A}$ = 1,608536			$\mathfrak{A}$ = 1,608273			$\mathfrak{A}$ = 1,585595	

	Flintglas No. 13. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.		Flintglas No. 30. $\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,627749	1,627749	*B*	1,623570	1,623570
C	1,629681	1,629681	*C*	1,625477	1,625422
D	1,635036	1,635005	*D*	1,630585	1,630548
E	1,642024	1,642024	*E*	1,637356	1,637356
F	1,648266	1,648391	*F*	1,643466	1,643572
G	1,660285	1,660154	*G*	1,655406	1,655182
H	1,671062	1,671062	*H*	1,666072	1,666072
	$\mathfrak{A}$ = 1,608665			$\mathfrak{A}$ = 1,605523	

3. Nimmt man in der Gleichung (2)

$$s^2 = 2S\left\{m\,\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\,\sin^2\frac{k\Delta z}{2}\right\}$$

die Annahme auf, dafs auf jedes schwingende Theilchen nur die in der Richtung der Coordinate z zunächst gelegenen Theilchen eine Einwirkung ausüben, welche man ohne bedeutend zu fehlen auf einen gemeinsamen Abstand $= \Delta z$ versetzen kann, so wird aufser k auch Δz für ein gegebenes Medium constant, und die Gleichung geht über in:

$$s^2 = 2 \sin^2 \frac{k\Delta z}{2} S\left\{m \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r) \cos^2 \alpha}{r}\right\}$$

$$= R \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}, \quad (8)$$

wo R der Kürze halber die doppelte Summe $S\left\{m \frac{f(r) + \mathfrak{F}(r) \cos^2 \alpha}{r}\right\}$ bezeichnet. Lässt man hierzu, um nur eine annähernde Formel zur leichtern Berechnung zu erhalten, in $k = \frac{2\pi}{l}$ die Wellenlängen l denen im leeren Raume proportional sein, nämlich $l = \frac{\lambda}{n}$, so ist

$$s = \sqrt{R} \,.\, \sin \frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$$

und

$$\Omega = \frac{s}{k} = \frac{\sqrt{R} \,.\, \sin \frac{\pi n \Delta z}{\lambda}}{\frac{2\pi}{\lambda}},$$

Es sei noch $\frac{\sqrt{R}}{2} = \frac{H}{n \Delta z}$, so erhält man

$$\Omega = H \frac{\sin \frac{\pi n \Delta z}{\lambda}}{\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}}, \quad (9)$$

oder

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{1}{H} \frac{\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}}{\sin \frac{\pi n \Delta z}{\lambda}} = \mathfrak{A} \frac{\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}}{\sin \frac{\pi n \Delta z}{\lambda}}, \quad (10)$$

denselben Ausdruck, wenn man Δz in r verwandelt, nach welchem Baden-Powell die Brechungsexponenten berechnet hat. Ich würde auf diese Näherungsformel nicht besonders eingegangen sein, wenn sie nicht die in dem Früheren öfters vorgekommene Annahme bestätigte, dafs nur die um ein schwingendes Aethertheilchen zunächst gelegenen Theile einen einigermafsen bemerkbaren Einflufs auf dasselbe ausüben. Deshalb will ich auch Powell's Berechnungen selbst hersetzen, um dadurch das Urtheil über den Werth der Formel zu erleichtern.

Wasser nach zwei Versuchen.				Auflösung von Potasche.			
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$		$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,3309	1,3309	9°54′	B	1,3996	1,3999	10°34′
C	1,3317	1,3315	10 25	C	1,4005	1,4008	11 5
D	1,3336	1,3333	11 36	D	1,4028	1,4029	12 20
E	1,3358	1,3355	12 57	E	1,4056	1,4044	13 10
F	1,3378	1,3376	14 3	F	1,4081	1,4080	14 57
G	1,3413	1,3413	15 51	G	1,4126	1,4126	16 55
H	1,3442	1,3443	17 11	H	1,4164	1,4162	18 20
		$\mathfrak{A} = 1,3243$				$\mathfrak{A} = 1,3922$	

Terpenthinöl.

	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,4705	1,4703	12° 25′
C	1,4715	1,4715	13 1
D	1,4744	1,4746	14 30
E	1,4783	1,4786	16 13
F	1,4817	1,4821	17 35
G	1,4882	1,4886	19 51
H	1,4939	1,4938	21 32

$\mathfrak{A} = 1,459$

Crownglas No. 9.

	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,5258	1,5259	11° 18′
C	1,5269	1,5269	11 51
D	1,5296	1,5296	13 12
E	1,5330	1,5332	14 46
F	1,5360	1,5360	16 0
G	1,5416	1,5416	18 5
H	1,5466	1,5462	19 37

$\mathfrak{A} = 1,5162$

Crownglas No. 13.

	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,5243	1,5243	10° 18′
C	1,5253	1,5253	11 51
D	1,5280	1,5280	13 12
E	1,5314	1,5314	14 46
F	1,5343	1,5344	16 0
G	1,5399	1,5399	18 5
H	1,5447	1,5445	19 37

$\mathfrak{A} = 1,5145$

Crownglas *M*.

	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,5548	1,5548	12° 19′
C	1,5559	1,5561	12 55
D	1,5591	1,5593	14 23
E	1,5632	1,5634	16 5
F	1,5667	1,5671	17 26
G	1,5735	1,5738	19 42
H	1,5795	1,5792	21 22

$\mathfrak{A} = 1,543$

Flintglas No. 23.

	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,6265	1,6269	16° 0′
C	1,6285	1,6278	16 17
D	1,6337	1,6335	18 15
E	1,6405	1,6403	20 22
F	1,6467	1,6464	22 8
G	1,6588	1,6582	25 2
H	1,6697	1,6697	27 9

$\mathfrak{A} = 1,606$

Flintglas No. 30.

	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B	1,6236	1,6239	16° 0′
C	1,6255	1,6246	16 17
D	1,6306	1,6305	18 15
E	1,6373	1,6373	20 22
F	1,6435	1,6434	22 8
G	1,6554	1,6551	25 2
H	1,6660	1,6660	27 9

$\mathfrak{A} = 1,6033$

Flintglas No. 3.			Flintglas No. 13.		
$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{\pi n \Delta z}{\lambda}$
B 1,6020	1,6020	15°20′	*B* 1,6277	1,6275	16°10′
C 1,6038	1,6039	16 5	*C* 1,6297	1,6299	16 41
D 1,6085	1,6079	17 55	*D* 1,6350	1,6355	18 35
E 1,6145	1,6145	19 59	*E* 1,6420	1,6426	20 44
F 1,6200	1,6204	21 42	*F* 1,6483	1,6486	22 31
G 1,6308	1,6313	24 33	*G* 1,6603	1,6609	25 29
H 1,6404	1,6404	26 39	*H* 1,6711	1,6711	27 39
	$\mathfrak{A} = 1,582$			$\mathfrak{A} = 1,607$	

---

4. Die Zerstreuung des Lichtes bildete bekanntlich lange Zeit hindurch den bedeutendsten Einwurf, welchen man gegen die Gültigkeit der Undulationstheorie erhob, da sie dieselbe nicht zu erklären vermochte; erst Cauchy's Scharfsinne verdanken wir die glückliche Lösung der schwierigen Aufgabe. Wenngleich ich ihm daher schon in §. I. im Wesentlichen gefolgt bin, und nur zur Vereinfachung der Rechnung, auch weil es mir unwesentlich scheint, jede Schwingung der Aethertheilchen längst der Richtung der Lichtstrahlen verworfen habe, so möchte es doch sowohl angemessen als nöthig sein, an dieser Stelle die Beweisführung von Cauchy etwas ausführlicher darzulegen und dadurch wenigstens eine kleine Probe von dem Verfahren dieses ausgezeichneten Analytikers zu geben. Es seien also wie in §. I. x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Aethertheilchens $\mathfrak{m}$, $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$; $x+\Delta' x$, $y+\Delta' y$, $z+\Delta' z$; $x+\Delta'' x$ .... die Coordinaten der übrigen Theilchen m, m', m'' ....; ihre Entfernungen von $\mathfrak{m}$ seien r, r', r'' .... und α, β, γ; α', β', γ'; α'' .... die Winkel zwischen diesen r, r' .... und den Coordinatenaxen x, y, z. Ferner werde die Wirkung von $\mathfrak{m}$ auf m, als gegenseitige Anziehung oder Abstofsung gedacht, mit $\mathfrak{m}\, m f(r)$ bezeichnet, dann ist nach §. I. (1) in der Lage des Gleichgewichts:

$$S\{mf(r)\cos\alpha\} = 0; \quad S\{mf(r)\cos\beta\} = 0; \quad S\{mf(r)\cos\gamma\} = 0. \quad (11)$$

Verwandeln sich während der Lichtschwingung die Coordinaten von $\mathfrak{m}$ in

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta,$$

die Coordinaten von m dem entsprechend in

$$x+\Delta x+\xi+\Delta\xi, \quad y+\Delta y+\eta+\Delta\eta, \quad z+\Delta z+\zeta+\Delta\zeta,$$

und geht damit zu gleicher Zeit r in $r(1+\varepsilon)$ über, worin jedoch schon die zweiten Potenzen von ε vernachlässigt werden können, so stellt sich die gemeinsame Wirkung aller Theilchen auf $\mathfrak{m}$

$$\left.\begin{aligned} \text{nach } x &= \mathfrak{m}\, S\{mf[r(1+\varepsilon)]\cos A\}, \\ \text{nach } y &= \mathfrak{m}\, S\{mf[r(1+\varepsilon)]\cos B\}, \\ \text{nach } z &= \mathfrak{m}\, S\{mf[r(1+\varepsilon)]\cos \Gamma\}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

wo die Winkel A, B, Γ durch die veränderte Richtung von $r(1+\varepsilon)$ mit den Coordinatenaxen x, y, z gebildet werden.

Hiernach ist

$$\cos A = \frac{\Delta x + \Delta \xi}{r(1+\varepsilon)} = \frac{r\cos\alpha + \Delta\xi}{r(1+\varepsilon)},$$

$$\cos B = \frac{\Delta y + \Delta \eta}{r(1+\varepsilon)} = \frac{r\cos\beta + \Delta\eta}{r(1+\varepsilon)},$$

$$\cos \Gamma = \frac{\Delta z + \Delta \zeta}{r(1+\varepsilon)} = \frac{r\cos\gamma + \Delta\zeta}{r(1+\varepsilon)},$$

ferner

$$f[r(1+\varepsilon)] = f(r) + r\varepsilon f'(r) = (1+\varepsilon)\{f(r) + \varepsilon \mathfrak{F}(r)\},$$

wenn man $\mathfrak{F}(r) = rf'(r) - f(r)$ setzt.

Durch Substitution dieser Werthe in (12) kommt die Wirkung sämmtlicher Theilchen m, m', m'' .... auf $\mathfrak{m}$

$$\text{nach } x = \mathfrak{m}\, S\left\{\left[mf(r) + m\varepsilon\mathfrak{F}(r)\right]\left[\cos\alpha + \frac{\Delta\xi}{r}\right]\right\},$$

$$\text{nach } y = \mathfrak{m}\, S\left\{\left[mf(r) + m\varepsilon\mathfrak{F}(r)\right]\left[\cos\beta + \frac{\Delta\eta}{r}\right]\right\},$$

$$\text{nach } z = \mathfrak{m}\, S\left\{\left[mf(r) + m\varepsilon\mathfrak{F}(r)\right]\left[\cos\gamma + \frac{\Delta\zeta}{r}\right]\right\},$$

oder mit Berücksichtigung von (11) und mit Uebergehung der kleinen Gröſsen zweiter Ordnung $\varepsilon\Delta\xi$, $\varepsilon\Delta\eta$, $\varepsilon\Delta\zeta$

$$\left.\begin{aligned}
\text{nach } x &= \mathfrak{m}\, S\left\{m\frac{f(r)}{r}\Delta\xi + m\varepsilon\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\right\},\\
\text{nach } y &= \mathfrak{m}\, S\left\{m\frac{f(r)}{r}\Delta\eta + m\varepsilon\mathfrak{F}(r)\cos\beta\right\},\\
\text{nach } z &= \mathfrak{m}\, S\left\{m\frac{f(r)}{r}\Delta\zeta + m\varepsilon\mathfrak{F}(r)\cos\gamma\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Den Werth von ε giebt die Gleichung

$$r^2(1+\varepsilon)^2 = (\Delta x + \Delta\xi)^2 + (\Delta y + \Delta\eta)^2 + (\Delta z + \Delta\zeta)^2$$

oder

$$r^2 + 2r^2\varepsilon = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + 2r(\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\zeta),$$

woraus wegen

$$r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\left(\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta + \cos\gamma\,\Delta\zeta\right)$$

folgt.

Diesen Werth von ε setze man in die Gleichungen (13) und bilde nach §. I. die Differenzialgleichungen für die Schwingung des Aetherthei1chens $\mathfrak{m}$; dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\alpha}{r}\Delta\xi\right\} + S\left\{m\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\beta}{r}\Delta\eta\right\} + S\left\{m\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\alpha\cos\gamma}{r}\Delta\zeta\right\},\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= S\left\{m\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\beta\cos\alpha}{r}\Delta\xi\right\} + S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\beta}{r}\Delta\eta\right\} + S\left\{m\frac{f(r)\cos\beta\cos\gamma}{r}\Delta\zeta\right\},\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= S\left\{m\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\gamma\cos\alpha}{r}\Delta\xi\right\} + S\left\{m\frac{\mathfrak{F}(r)\cos\gamma\cos\beta}{r}\Delta\eta\right\} + S\left\{m\frac{f(r)+\mathfrak{F}(r)\cos^2\gamma}{r}\Delta\zeta\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die Integration dieser Differenzialgleichungen geht wieder davon aus, dafs ξ, η, ζ sowohl nach der Zeit als nach der Richtung des Strahls periodische Functionen sind. Wenn man also die beliebig angenommene Richtungslinie des Strahls mit τ bezeichnet, deren Anfangspunct im Anfangspuncte der Coordinaten liegt, so darf man allgemein setzen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Sigma(\mathfrak{d}\cos k\tau + \mathfrak{g}\sin k\tau), \\ \eta &= \Sigma(\mathfrak{e}\cos k\tau + \mathfrak{h}\sin k\tau), \\ \zeta &= \Sigma(\mathfrak{f}\cos k\tau + \mathfrak{i}\sin k\tau), \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

in denen Σ die Summen der ähnlichen Glieder ausdrückt, $\mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}$ Constanten und Functionen von t, k endlich $= \frac{2\pi}{l}$ ist. Zur Bestimmung der Lage von τ nennen wir a, b, c die Cosinus der Winkel, welche diese Richtungslinie des Strahls mit den Coordinatenaxen x, y, z bildet; dadurch erhalten wir zuerst die Bedingungsgleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

ferner

$$\tau = ax + by + cz,$$

und

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= a\Delta x + b\Delta y + c\Delta z \\ &= r(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma). \end{aligned}$$

In dieser letztern Gleichung ist der Factor $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$ der Cosinus des Winkels zwischen r und τ, er heifse δ, so folgt

$$\cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma, \quad (16)$$

und

$$\Delta\tau = r\cos\delta. \quad (17)$$

Die nächste Aufgabe ist jetzt, die Gröfsen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ wegen der Gleichungen (14) auf passende Weise auszudrücken; man nehme also aus den Summen (15) ein einzelnes Glied zur vorläufigen Bestimmung von ξ, η, ζ und setze demgemäfs

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{d}\cos k\tau + \mathfrak{g}\sin k\tau, \\ \eta &= \mathfrak{e}\cos k\tau + \mathfrak{h}\sin k\tau, \\ \zeta &= \mathfrak{f}\cos k\tau + \mathfrak{i}\sin k\tau. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Geht hierin ξ in $\xi + \Delta\xi$ über, so verwandelt sich auch τ in $\tau + \Delta\tau$, also findet man

$$\begin{aligned} \xi + \Delta\xi &= \mathfrak{d}\cos k(\tau + \Delta\tau) + \mathfrak{g}\sin k(\tau + \Delta\tau) \\ &= \mathfrak{d}\cos k\tau\cos k\Delta\tau - \mathfrak{d}\sin k\tau\sin k\Delta\tau + \mathfrak{g}\sin k\tau\cos k\Delta\tau + \mathfrak{g}\cos k\tau\sin k\Delta\tau \\ &= (\mathfrak{d}\cos k\tau + \mathfrak{g}\sin k\tau)\cos k\Delta\tau + (-\mathfrak{d}\sin k\tau + \mathfrak{g}\cos k\tau)\sin k\Delta\tau \\ &= \xi\cos k\Delta\tau + \frac{d\xi}{d\tau}\cdot\frac{\sin k\Delta\tau}{k}, \end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf (17)

$$\Delta\xi = -2\xi\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2} + \frac{d\xi}{d\tau}\,\frac{\sin kr\cos\delta}{k}.$$

Ebenso

$$\Delta\eta = -2\eta\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2} + \frac{d\eta}{d\tau}\,\frac{\sin kr\cos\delta}{k},$$

$$\Delta\zeta = -2\zeta\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2} + \frac{d\zeta}{d\tau}\,\frac{\sin kr\cos\delta}{k}.$$

Diese Werthe sind in die Differenzialgleichungen (14) zu substituiren; setzt man der Kürze wegen

$$L = S\left\{\frac{2\,m f(r)}{r}\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\} + S\left\{\frac{2\,m \mathfrak{F}(r)}{r}\cos^2\alpha\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\},$$

$$M = S\left\{\frac{2\,m f(r)}{r}\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\} + S\left\{\frac{2\,m \mathfrak{F}(r)}{r}\cos^2\beta\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\},$$

$$N = S\left\{\frac{2\,m f(r)}{r}\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\} + S\left\{\frac{2\,m \mathfrak{F}(r)}{r}\cos^2\gamma\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\},$$

$$P = S\left\{\frac{2m\mathfrak{F}(r)}{r}\cos\beta\cos\gamma\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\},$$

$$Q = S\left\{\frac{2m\mathfrak{F}(r)}{r}\cos\gamma\cos\alpha\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\},$$

$$R = S\left\{\frac{2m\mathfrak{F}(r)}{r}\cos\alpha\cos\beta\sin^2\frac{kr\cos\delta}{2}\right\},$$

$$L' = S\left\{\frac{mf(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right\} + S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{kr}\cos^2\alpha\sin(kr\cos\delta)\right\},$$

$$M' = S\left\{\frac{mf(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right\} + S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{kr}\cos^2\beta\sin(kr\cos\delta)\right\},$$

$$N' = S\left\{\frac{mf(r)}{kr}\sin(kr\cos\delta)\right\} + S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{kr}\cos^2\gamma\sin(kr\cos\delta)\right\},$$

$$P' = S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{kr}\cos\beta\cos\gamma\sin(kr\cos\delta)\right\},$$

$$Q' = S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{kr}\cos\gamma\cos\alpha\sin(kr\cos\delta)\right\},$$

$$R' = S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{kr}\cos\alpha\cos\beta\sin(kr\cos\delta)\right\},$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(L\xi + R\eta + Q\zeta) + \left(L'\frac{d\xi}{d\tau} + R'\frac{d\eta}{d\tau} + Q'\frac{d\zeta}{d\tau}\right),\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(R\xi + M\eta + P\zeta) + \left(R'\frac{d\xi}{d\tau} + M'\frac{d\eta}{d\tau} + P'\frac{d\zeta}{d\tau}\right),\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(Q\xi + P\eta + N\zeta) + \left(Q'\frac{d\xi}{d\tau} + P'\frac{d\eta}{d\tau} + N'\frac{d\zeta}{d\tau}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Wir haben es jedoch bei der jetzigen Untersuchung nur mit einem gleichförmig elastischen Medium zu thun; in demselben liegen die Aethertheilchen gleichmäfsig um die Richtung des Strahls vor und hinter dem schwingenden Theilchen vertheilt, und es finden sich immer je zwei Glieder, welche mit $\cos\delta$ und $-\cos\delta$ behaftet sich gegenseitig auf Null reduciren. Somit darf man, ja selbst noch in dem Falle, dafs nur um τ eine gleiche Vertheilung des Aethers statt findet, nach dieser Linie aber eine andere, die Coefficienten L', M', N', P', Q', R' wegen des Factors $\sin(kr\cos\delta)$ gleich Null setzen. Man erhält dann aus (19) die einfachern Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(L\xi + R\eta + Q\zeta),\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(R\xi + M\eta + P\zeta),\\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(Q\xi + P\eta + N\zeta).\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Zur Integration dieser Gleichungen ist eine Umlegung der bisher angenommenen Richtungen der Schwingung nach x, y, z in andere nothwendig, welche eine Trennung derselben von einander gestatten, nämlich die ξ, η, ζ nicht wie hier zusammenbringen. Man nehme also als eine dieser neuen Richtungen der Schwingung die beliebige Linie OA an, deren Anfangspunct im Anfangspuncte der x, y, z liegt, und nenne A, B, C die Cosinus der Winkel, welche sie mit x, y, z bildet. Die Cosinus geben die Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

und die Bewegung des Aethertheilchens m längst OA gleich s gesetzt, liefert

$$s = A\xi + B\eta + C\zeta.$$

Wenn man die erste von den Gleichungen (20) mit A, die zweite mit B, die dritte mit C multiplicirt, und alle drei addirt, so wird

$$A\frac{d^2\xi}{dt^2} + B\frac{d^2\eta}{dt^2} + C\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\left(\frac{AL + BR + CQ}{A}A\xi + \frac{AR + BM + CP}{B}B\eta + \frac{AQ + BP + CN}{C}C\zeta\right).$$

In dieser so umgestalteten Gleichung hat man noch

$$\frac{AL + BR + CQ}{A} = \frac{AR + BM + CP}{B} = \frac{AQ + BP + CN}{C} = s^2 \quad (21)$$

zu setzen, um

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -s^2 s \quad (22)$$

zu erhalten, eine Gleichung, in welcher die verlangte Trennung der Schwingungsrichtungen erreicht und in welcher wegen der Periodicität der Schwingungen auch der Zeit nach $s = \frac{2\pi}{T}$ ist. Es folgt aber weiter aus den drei nach (21) gebildeten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}A(L - s^2) + BR + CQ &= 0,\\ AR + B(M - s^2) + CP &= 0,\\ AQ + BP + C(N - s^2) &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

durch Elimination von A, B, C

$$(L - s^2)(M - s^2)(N - s^2) - P^2(L - s^2) - Q^2(M - s^2) - R^2(N - s^2) + 2PQR = 0, \quad (24)$$

eine Gleichung des dritten Grades von s^2, die drei verschiedene Werthe von s^2 liefert, welche sämmtlich der (21) gestellten Bedingung genügen. Daher giebt es drei Richtungen OA, nach welchen die Differenzialgleichung (22) besteht, nach OA', OA'', OA'''; dazu lehrt die Form der Gleichung (24), dafs diese Richtungen mit den drei Axen der durch

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + 2Pyz + 2Qzx + 2Rxy = 1 \quad (25)$$

ausgedrückten Oberfläche des zweiten Grades nicht nur zusammenfallen, sondern dafs auch wenn diese

Oberfläche ein Ellipsoïd ist, die drei Werthe von $\frac{1}{s^2}$ genau den Quadraten der auf einander senkrechten halben Axen entsprechen. Wir haben also, um die Zerstreuung des Lichtes zu erklären, nur noch nach (25) die Werthe von s^2 und damit die Relation zwischen s^2 und k^2 zu bestimmen; die weitere Behandlung der Differenzial-Gleichung (22) können wir füglich bei Seite lassen. Damit wir unsern Zweck erreichen, geben wir den Coefficienten L, M, N, P, Q, R bequemere Formen. Nach (16) ist

$$\cos\delta = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma;$$

setzt man hier

$$ka = u, \quad kb = v, \quad kc = w,$$

so ist

$$\cos\delta = \frac{u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma}{k}, \quad (26)$$

und

$$k^2(a^2 + b^2 + c^2) = u^2 + v^2 + w^2,$$

oder wegen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2. \quad (27)$$

Der Werth von $\cos\delta$ (26) werde in die Gleichungen für L, M, N, P, Q, R substituirt, und zur Abkürzung der Formeln

$$\mathfrak{B} = S\left\{\frac{2mf(r)}{r}\sin^2 r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\right\}$$

$$= S\left\{\frac{mf(r)}{r}\Big(1 - \cos r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\Big)\right\},$$

$$V = S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}(u\cos\alpha + v\cos\beta + u\cos\gamma)^2 + \frac{\cos r(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)}{r^2}\right]\right\}$$

gesetzt, so findet man

$$L = \mathfrak{B} + \frac{d^2V}{du^2}, \qquad M = \mathfrak{B} + \frac{d^2V}{dv^2}, \qquad N = \mathfrak{B} + \frac{d^2V}{dw^2},$$

$$P = \frac{d^2V}{dv\,dw}, \qquad Q = \frac{d^2V}{dw\,du}, \qquad R = \frac{d^2V}{du\,dv}.$$

Ferner sei

$$K = \tfrac{1}{2}k^2 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}, \qquad \frac{dV}{dK} = V' \quad \text{und} \quad \frac{d^2V}{dK^2} = V'',$$

dann ist

$$\frac{dV}{du} = \frac{dV}{dK}\cdot\frac{dK}{du} = uV'; \qquad \frac{dV}{dv} = \frac{dV}{dK}\cdot\frac{dK}{dv} = vV'; \qquad \frac{dV}{dw} = \frac{dV}{dK}\cdot\frac{dK}{dw} = wV';$$

und daraus wieder

$$\frac{d^2V}{du^2} = \frac{d(uV')}{du} = V' + u\frac{dV'}{dK}\cdot\frac{dK}{du} = V' + u^2V'',$$

$$\frac{d^2V}{dv^2} = \frac{d(vV')}{dv} = V' + v\frac{dV'}{dK}\cdot\frac{dK}{dv} = V' + v^2V'',$$

$$\frac{d^2V}{dw^2} = \frac{d(wV')}{dw} = V' + w\frac{dV'}{dK}\cdot\frac{dK}{dw} = V' + w^2V'',$$

$$\frac{d^2 V}{dv\,dw} = \frac{d(vV')}{dw} = v\,\frac{dV'}{dK}\cdot\frac{dK}{dw} = vwV'',$$

$$\frac{d^2 V}{dw\,du} = \frac{d(wV')}{du} = w\,\frac{dV'}{dK}\cdot\frac{dK}{du} = wuV'',$$

$$\frac{d^2 V}{du\,dv} = \frac{d(uV')}{dv} = u\,\frac{dV'}{dK}\cdot\frac{dK}{dv} = uvV''.$$

Dadurch gehen die obigen Formeln über in

$$L = \mathfrak{V} + V' + u^2 V''; \quad M = \mathfrak{V} + V' + v^2 V''; \quad N = \mathfrak{V} + V' + w^2 V'';$$
$$P = vwV''; \quad Q = wuV''; \quad R = uvV''.$$

Diese Werthe setze man in die Gleichung (25), welche die Werthe von s^2 bestimmt, und man erhält

$$(\mathfrak{V} + V')(x^2 + y^2 + z^2) + V''(u^2 x^2 + v^2 y^2 + w^2 z^2 + 2vwyz + 2wuzx + 2uvxy) = 1$$

oder $$(\mathfrak{V} + V')(x^2 + y^2 + z^2) + V''(ux + vy + wz)^2 = 1. \quad (28)$$

In einem gleichförmig elastischen Medium müssen aber, weil kein Grund zu einer besondern Wahl vorhanden ist, die Schwingungen nach je drei unter einander rechtwinkligen Richtungen statt finden können, von denen die eine in der Richtung des Strahls, die beiden andern in der darauf senkrechten Ebene liegen. Läfst man daher die Richtung des Strahls τ parallel zur Coordinatenaxe z sein, so ist

wegen $a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1$

auch $u = 0, \quad v = 0, \quad w = k,$

und die Gleichung (28) verwandelt sich in

$$(\mathfrak{V} + V')(x^2 + y^2) + (\mathfrak{V} + V' + k^2 V'')z^2 = 1, \quad (29)$$

worin die Quadrate der halben Axen

$$\text{nach } x \text{ und } y = \frac{1}{\mathfrak{V} + V'},$$

$$\text{und nach } z = \frac{1}{\mathfrak{V} + V' + k^2 V''},$$

also die drei Werthe von s^2 für die Schwingungen

$$\left.\begin{array}{l} \text{nach } x \text{ und } y = \mathfrak{V} + V', \\ \text{und nach } z = \mathfrak{V} + V' + k^2 V'' \end{array}\right\} \quad (30)$$

sind.

Von s^2 hängt die Schnelligkeit des Lichtes ab; man sieht aber, dafs dieselbe nur wegen der Schwingungen nach x und y gleich sein kann, wegen der Schwingungen nach z dagegen eine andere. Unter diesen Umständen bleibt kein anderer Ausweg, als den Schwingungen nach z jeden Einflufs auf das Gesichtsorgan abzustreiten und sie ganz zu übergehen. In Betreff der beiden gleichen Werthe von s^2 ist

$$\mathfrak{V} = S\left\{\frac{mf(r)}{r}[1 - \cos(kr\cos\gamma)]\right\},$$

$$V = S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{r}\left[\tfrac{1}{2}k^2\cos^2\gamma + \frac{\cos(kr\cos\gamma)}{r^2}\right]\right\},$$

$$V' = \frac{dV}{dK} = \frac{dV}{dk}\cdot\frac{dk}{dK} = \frac{1}{k}\cdot\frac{dV}{dk} = S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)}{r}\left[\cos^2\gamma - \frac{\cos\gamma}{rk}\sin(kr\cos\gamma)\right]\right\}$$

$$= S\left\{\frac{m\mathfrak{F}(r)\cos^2\gamma}{r}\left[1 - \frac{\sin(kr\cos\gamma)}{kr\cos\gamma}\right]\right\},$$

also

$$s^2 = \mathfrak{B} + V' = k^2 S\left\{\frac{m r f(r) \cos^2\gamma}{1.2}\right\} - k^4 S\left\{\frac{m r^3 f(r) \cos^4\gamma}{1.2.3.4}\right\} + k^6 S\left\{\frac{m r^5 f(r) \cos^6\gamma}{1.2.3.4.5.6}\right\} - \ldots\ldots$$
$$+ k^2 S\left\{\frac{m r \mathfrak{F}(r) \cos^4\gamma}{1.2.3}\right\} - k^4 S\left\{\frac{m r^3 \mathfrak{F}(r) \cos^6\gamma}{1.2.3.4.5}\right\} + k^6 S\left\{\frac{m r^5 \mathfrak{F}(r) \cos^8\gamma}{1.2.3.4.5.6.7}\right\} - \ldots$$

oder

$$\left.\begin{aligned} s^2 = {} & k^2 S\left\{\frac{m r \cos^2\gamma}{1.2}\left[f(r) + \tfrac{1}{3}\mathfrak{F}(r)\cos^2\gamma\right]\right\} \\ & - k^4 S\left\{\frac{m r^3 \cos^4\gamma}{1.2.3.4}\left[f(r) + \tfrac{1}{5}\mathfrak{F}(r)\cos^2\gamma\right]\right\} \\ & + k^6 S\left\{\frac{m r^5 \cos^6\gamma}{1.2.3.4.5.6}\left[f(r) + \tfrac{1}{7}\mathfrak{F}(r)\cos^2\gamma\right]\right\} \\ & - \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Verglichen mit der obigen Gleichung (3), in welcher $\Delta z = r\cos\gamma$ ist, zeigt sich nur darin eine Abweichung, dafs hier $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, ... $\mathfrak{F}(r)$ in die Summen eingeht, dort der ganze Werth. Dies giebt jedoch keine Entscheidung, ob die frühere die Schwingungen beschränkende Hypothese zulässig oder nicht zulässig sei, weil man auch hier zur weitern Berechnung der über die Zerstreuung des Lichtes vorhandenen Beobachtungen die Gleichung (31) in

$$s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + a_4 k^8 + \ldots \quad (32)$$

umwandeln und die im Allgemeinen unbestimmbaren Gröfsen a_1, a_2, a_3, ... von der Erfahrung entlehnen mufs. Da übrigens die Schnelligkeit des Lichts $= \Omega$ gesetzt,

$$\Omega^2 = \frac{s^2}{k^2}$$

ist, so folgt noch

$$\Omega^2 = a_1 + a_2 k^2 + a_3 k^4 + a_4 k^6 + \ldots \quad (33)$$

eine mit den obigen Untersuchungen vollkommen übereinstimmende Gleichung. —

5. Nicht weniger beachtungswerth als die vorstehende Entwicklung des Ausdrucks für die Schnelligkeit des Lichtes ist die Berechnung der Fraunhoferschen Beobachtungen, welche Cauchy hieran anknüpft. Denn während die obigen Verfahrungsarten eigentlich nur den Beweis liefern, dafs der gefundene Ausdruck ein richtiger ist, nicht aber ein Mittel an die Hand geben, durch die Berechnung selbst Resultate zu erhalten, welche von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern frei wären, hat Cauchy die sämmtlichen Beobachtungen so zusammenzustellen gewufst, dafs sich daraus die befriedigendsten Folgerungen ziehen lassen. Deshalb glauben wir auch fort, wenn wir gleich keine vollständige Darstellung seines Verfahrens geben können, die weit über die uns gesetzten Grenzen hinaustreten würde, doch eine kurze Andeutung desselben nicht übergehen zu dürfen, weil auch diese schon eine treffliche Anregung zu weitern Ideen gewähren kann. Die vorhin gefundene Relation zwischen s und k gab:

$$s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4 + a_3 k^6 + a_4 k^8 + \ldots,$$

daraus findet man durch Umkehrung der Reihe

$$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \ldots, \quad (34)$$

worin b_1, b_2, ... durch die Bedingungsgleichungen

$$a_1 b_1 = 1,$$
$$a_2 b_1 + a_1^2 b_2 = 0,$$
$$a_3 b_1 + 2 a_1 a_2 b_2 + a_1^3 b_3 = 0$$
u. s. w.

bestimmt werden. Die auf einander folgenden Glieder dieser Reihe werden, wie oben gezeigt ist, immer kleiner an Werth, so dafs man zu einer mehr oder weniger genauen Berechnung eine gröfsere oder kleinere Anzahl derselben bewahren mufs, in keinem Falle aber mehr, als bis die Fehlergrenzen erreicht sind, die sich aus den doppelten Beobachtungen Fraunhofers am Wasser und Flintglas No. 23. ergeben. Da nun Fraunhofer bei jeder der von ihm untersuchten Substanzen die Brechungscoefficienten von sieben Strahlen gemessen hat, und deshalb, wenn man für diese der Reihe nach $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ und ebenso $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$ setzt, immer sieben Gleichungen entstehen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} k_1^2 = b_1 s_1^2 + b_2 s_1^4 + b_3 s_1^6 + \ldots \\ k_2^2 = b_1 s_2^2 + b_2 s_2^4 + b_3 s_2^6 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_7^2 = b_1 s_7^2 + b_2 s_7^4 + b_3 s_7^6 + \ldots, \end{array}\right\} \quad (35)$$

in welchen dieselben allgemeinen Coefficienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ vorkommen, so kann man, je nachdem man ein, zwei, drei oder mehr Glieder zur Berechnung bewahren will, durch zwei, drei oder mehr Gleichungen die allgemeinen Coefficienten fortschaffen und Gleichungen zur Berechnung der noch übrigen k^2 formiren. Behält man z. B. nur ein Glied und verbindet die erste Gleichung mit einer beliebigen andern für k_n^2, das ist $k_2^2, k_3^2, k_4^2, \ldots k_7^2$, so findet man

$$k_n^2 = \frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2; \quad (36)$$

werden zwei Glieder bewahrt, so ist

$$k_n^2 = \frac{s_n^2 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2} \cdot \frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2 + \frac{s_n^2 - s_1^2}{s_2^2 - s_1^2} \cdot \frac{s_n^2}{s_2^2} k_2^2, \quad (37)$$

bei drei Gliedern

$$k_n^2 = \frac{(s_n^2 - s_2^2)(s_n^2 - s_3^2)}{(s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)} \cdot \frac{s_n^2}{s_1^2} k_1^2 + \frac{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_3^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)} \cdot \frac{s_n^2}{s_2^2} k_2^2 + \frac{(s_n^2 - s_1^2)(s_n^2 - s_2^2)}{(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)} \cdot \frac{s_n^2}{s_3^2} k_3^2. \quad (38)$$

Schon diese Zusammenstellung zeigt, dafs in der Entwicklung ein leicht zu erkennendes Gesetz obwaltet; noch deutlicher tritt es hervor, wenn man in (36) $n = 2$, in (37) $n = 3$, in (38) $n = 4$ setzt, und den Gleichungen folgende Form giebt:

$$\frac{k_1^2}{s_1^2 (s_1^2 - s_2^2)} + \frac{k_2^2}{s_2^2 (s_2^2 - s_1^2)} = 0, \quad (39)$$

$$\frac{k_1^2}{s_1^2 (s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)} + \frac{k_2^2}{s_2^2 (s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)} + \frac{k_3^2}{s_3^2 (s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{k_1^2}{s_1^2 (s_1^2 - s_2^2)(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_4^2)} + \frac{k_2^2}{s_2^2 (s_2^2 - s_1^2)(s_2^2 - s_3^2)(s_2^2 - s_4^2)} + \frac{k_3^2}{s_3^2 (s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_2^2)(s_3^2 - s_4^2)}$$
$$+ \frac{k_4^2}{s_4^2 (s_4^2 - s_1^2)(s_4^2 - s_2^2)(s_4^2 - s_3^2)} = 0. \quad (41)$$

So fällt es nicht schwer, die Formel bis auf sieben Strahlen auszudehnen; sie giebt

$$\frac{k_1^2}{s_1^2(s_1^2-s_2^2)(s_1^2-s_3^2)(s_1^2-s_4^2)(s_1^2-s_5^2)(s_1^2-s_6^2)(s_1^2-s_7^2)}+\ldots+\frac{k^7}{s_7^2(s_7^2-s_1^2)\ldots(s_7^2-s_6^2)}=0. \quad (42)$$

Man setze diese Glieder der Reihe nach $= K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$, so erhält man die Gleichung

$$K_1+K_2+K_3+K_4+K_5+K_6+K_7=0, \quad (43)$$

von welcher man zwei, drei oder mehr Glieder behalten kann, je nachdem man von den Reihen für k^2 (35) nur ein, zwei oder mehr Glieder bewahren will; doch vereinfachen sich in diesen Fällen die Ausdrücke für K_1, K_2 .... in die unter (39), (40), (41) .... gegebenen Formen.

Die bisher behandelte Relation zwischen s und k möge sich auf die Luft oder den leeren Raum beziehen, es besitze also l in $k=\frac{2\pi}{l}$ der Reihe nach die für die Strahlen *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H* oben angegebenen Längen, und T in $s=\frac{2\pi}{T}$ gebe die diesen Längen proportionalen Zeiten. Bei dem Uebergange in ein anderes Medium bleibt s unverändert, l dagegen vermindert sich in dem Maafse als der Brechungscoefficient wächst; ist dieser in dem neuen Medium für die sieben Strahlen $=\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7$, so werden die Wellenlängen derselben $\frac{l_1}{\theta_1}, \frac{l_2}{\theta_2}, \ldots \frac{l_7}{\theta_7}$, oder k geht allgemein in θk über, und die obige Gleichung (43) verwandelt sich in

$$K_1\theta_1^2+K_2\theta_2^2+K_3\theta_3^2+K_4\theta_4^2+K_5\theta_5^2+K_6\theta_6^2+K_7\theta_7^2=0$$

oder, wenn zur Abkürzung $\theta^2=\Theta$ ist, in

$$K_1\Theta_1+K_2\Theta_2+K_3\Theta_3+K_4\Theta_4+K_5\Theta_5+K_6\Theta_6+K_7\Theta_7=0. \quad (44)$$

Die übrigen von Fraunhofer untersuchten Substanzen geben ähnliche Gleichungen, nämlich

$$(45) \quad K_1\Theta'_1+K_2\Theta'_2+K_3\Theta'_3+K_4\Theta'_4+K_5\Theta'_5+K_6\Theta'_6+K_7\Theta'_7=0,$$

$$(46) \quad K_1\Theta''_1+K_2\Theta''_2+K_3\Theta''_3+K_4\Theta''_4+K_5\Theta''_5+K_6\Theta''_6+K_7\Theta''_7=0$$

u. s. w.,

wenn $\Theta', \Theta'', \Theta'''$ .... die Quadrate der Brechungscoefficienten dieser übrigen nach einer beliebigen Reihe geordneten Substanzen bedeuten. Zu den bisherigen Bezeichnungen führen wir noch folgende ein. Die Summe der sieben Werthe von $\Theta, \Theta', \Theta''$ .... werde durch ein vorgesetztes S ausgedrückt, also

$$S\Theta=\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7,$$

$$S\Theta'=\Theta'_1+\Theta'_2+\Theta'_3+\Theta'_4+\Theta'_5+\Theta'_6+\Theta'_7 \quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man vor einzelne Glieder in diesen Summen negative Zeichen, so soll je nach der übrigens beliebig getroffenen Wahl das S mit S', S'' .... vertauscht werden. Um die Summen der Quadrate der Brechungscoefficienten für gleiche Farbestrahlen durch sämmtliche untersuchte Substanzen auszudrücken, diene das Summenzeichen Σ, und bei veränderten Vorzeichen auch Σ', Σ'' ...., folglich

$$\Sigma\Theta_1=\Theta_1+\Theta'_1+\Theta''_1+\Theta'''_1+\ldots$$

$$\Sigma\Theta_2=\Theta_2+\Theta'_2+\Theta''_2+\Theta'''_2+\ldots;$$

endlich stehe

$$\Sigma S\Theta \quad \text{für} \quad S\Theta+S\Theta'+S\Theta''+S\Theta'''+\ldots$$

$$\Sigma' S'\Theta \quad \text{für} \quad S'\Theta+S'\Theta'+S'\Theta''+S'\Theta'''+\ldots \quad \text{u. s. w.}$$

Hiernach können wir zur Berechnung übergehen, bei welcher wir aus der allgemeinen Formel

$$k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \ldots.$$

nach und nach ein, zwei, drei u. s. w. Glieder behalten, und uns immer mehr den beobachteten Werthen nähern, bis die gestatteten Fehlergrenzen erreicht sind. Es bleibe also zunächst nur ein Glied, dann folgt aus (**44**), wenn man die beiden unter Θ_1 bis Θ_7 gewählten Werthe mit Θ_m und Θ_n bezeichnet:

$$K_m \Theta_m + K_n \Theta_n = 0$$

oder

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_n} = -\frac{K_n}{K_m}; \quad (47)$$

ebenso aus (**45**)

$$K_m \Theta'_m + K_n \Theta'_n = 0$$

oder

$$\frac{\Theta'_m}{\Theta'_n} = -\frac{K_n}{K_m}; \quad (48)$$

dies giebt

$$\frac{\Theta_m}{\Theta_n} = \frac{\Theta'_m}{\Theta'_n} \quad \text{oder} \quad \frac{\Theta_m}{\Theta'_m} = \frac{\Theta_n}{\Theta'_n}. \quad (49)$$

Setzt man statt m und n die Zahlen **1** bis **7**, so erhält man

$$\frac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \frac{\Theta_2}{\Theta'_2} = \frac{\Theta_3}{\Theta'_3} = \frac{\Theta_4}{\Theta'_4} = \frac{\Theta_5}{\Theta'_5} = \frac{\Theta_6}{\Theta'_6} = \frac{\Theta_7}{\Theta'_7}, \quad (50)$$

und daraus wegen der gleichen Brüche durch Addition der Zähler und Nenner

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Theta_1}{\Theta'_1} = \dfrac{S\Theta}{S\Theta'} \quad \text{oder} \quad \dfrac{\Theta_1}{S\Theta} = \dfrac{\Theta'_1}{S\Theta'}, \\ \dfrac{\Theta_2}{\Theta'_2} = \dfrac{S\Theta}{S\Theta'} \quad \text{oder} \quad \dfrac{\Theta_2}{S\Theta} = \dfrac{\Theta'_2}{S\Theta'} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \quad (51)$$

Die übrigen Substanzen geben ähnliche Gleichungen, als

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta} = \frac{\Theta''_1}{S\Theta''}; \quad \frac{\Theta_2}{S\Theta} = \frac{\Theta''_2}{S\Theta''}; \quad \frac{\Theta_1}{S\Theta} = \frac{\Theta'''_1}{S\Theta'''}; \quad \text{u. s. w.}$$

nimmt man alle zusammen, so hat man

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta} = \frac{\Theta'_1}{S\Theta'} = \frac{\Theta''_1}{S\Theta''} = \frac{\Theta'''_1}{S\Theta'''} = \ldots.$$

$$\frac{\Theta_2}{S\Theta} = \frac{\Theta'_2}{S\Theta'} = \frac{\Theta''_2}{S\Theta''} = \ldots,$$

und daraus wieder

$$\frac{\Theta_1}{S\Theta} = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta}; \quad \frac{\Theta_2}{S\Theta} = \frac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta}; \quad \frac{\Theta'_1}{S\Theta'} = \frac{\Sigma\Theta'_1}{\Sigma S\Theta'}; \quad \ldots.$$

woraus allgemein

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 = \dfrac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta} \cdot S\Theta, \\ \Theta_2 = \dfrac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta} \cdot S\Theta, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Theta_7 = \dfrac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta} \cdot S\Theta \end{array}\right\} \quad (52)$$

folgt.

Allein die nach diesen Gleichungen berechneten Werthe können den Beobachtungen um so weniger Genüge leisten, als bei der Annahme

$$k^2 = b_1 s^2$$

die Zerstreuung des Lichtes überhaupt wegfällt. Man setze also die aus (52) berechneten Werthe $= \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6, \vartheta_7$, und lasse die wahren Werthe aus

$$\vartheta_1 + \Delta\Theta_1;\ \vartheta_2 + \Delta\Theta_2;\ \ldots .\ \vartheta_7 + \Delta\Theta_7$$

zusammengesetzt sein. Dann ist

$$\vartheta_1 = \frac{\Sigma\Theta_1}{\Sigma S\Theta}.S\Theta;\ \vartheta_2 = \frac{\Sigma\Theta_2}{\Sigma S\Theta}.S\Theta;\ \ldots .\ \vartheta_7 = \frac{\Sigma\Theta_7}{\Sigma S\Theta}.S\Theta \quad (53)$$

und

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4+\vartheta_5+\vartheta_6+\vartheta_7 = S\Theta = \Theta_1+\Theta_2+\Theta_3+\Theta_4+\Theta_5+\Theta_6+\Theta_7. \quad (54)$$

Substituirt man in den letztern Theil $\vartheta_1 + \Delta\Theta_1$ für Θ_1 u. s. w., so folgt

$$\Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \ldots . + \Delta\Theta_7 = 0 \text{ oder } S\Delta\Theta = 0. \quad (55)$$

Hiernach mögen von den Gleichungen (35) zwei Glieder, oder von den Gleichungen (44), (45), (46) .... drei Glieder zur Berechnung kommen. Die drei aus Θ_1 bis Θ_7 beliebig gewählten Glieder seien Θ_m, Θ_n, Θ_p, so ist

$$K_m\Theta_m + K_n\Theta_n + K_p\Theta_p = 0, \quad (56)$$

$$K_m\Theta'_m + K_n\Theta'_n + K_p\Theta'_p = 0 \quad (57) \text{ u. s. w.,}$$

also auch

$$K_m\Sigma\Theta_m + K_n\Sigma\Theta_n + K_p\Sigma\Theta_p = 0 \quad (58)$$

und ebenfalls wegen (53)

$$K_m\vartheta_m + K_n\vartheta_n + K_p\vartheta_p = 0. \quad (59)$$

Wird diese Gleichung mit (56) zusammengestellt, in der sich Θ_m in $\vartheta_m + \Delta\Theta_m$, Θ_n in $\vartheta_n + \Delta\Theta_n$ und Θ_p in $\vartheta_p + \Delta\Theta_p$ trennt, so ergiebt sich

$$K_m\Delta\Theta_m + K_n\Delta\Theta_n + K_p\Delta\Theta_p = 0 \quad (60)$$

Man lasse in dieser Gleichung $m = 1$, $n = 2$, p aber nach und nach 3, 4, 5, 6, 7 sein, so findet man

$$\Delta\Theta_3 = -\frac{K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2}{K_3},\ \Delta\Theta_4 = -\frac{K_1\Delta\Theta_1 + K_2\Delta\Theta_2}{K_4} \text{ u. s. w.,} \quad (61)$$

also durch Substitution dieser Werthe in

$$\Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_2 + \Delta\Theta_3 + \Delta\Theta_4 + \Delta\Theta_5 + \Delta\Theta_6 + \Delta\Theta_7 = 0$$

eine lineare Gleichung zwischen $\Delta\Theta_1$ und $\Delta\Theta_2$, aus welcher

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_2} = M$$

entsteht, wo M eine constante aus $K_1, K_2, \ldots . K_7$ gebildete Function bedeutet. Die zweite Substanz giebt ebenso

$$\frac{\Delta\Theta'_1}{\Delta\Theta'_2} = M,$$

so dafs auch hier, ähnlich wie oben

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_2} = \frac{\Delta\Theta'_1}{\Delta\Theta'_2} \text{ oder } \frac{\Delta\Theta'}{\Delta\Theta'_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta'_2} \quad (62)$$

ist. Durch Veränderung der Zahlen für m und n erhält man überhaupt

$$\frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta'_1} = \frac{\Delta\Theta_2}{\Delta\Theta'_2} = \frac{\Delta\Theta_3}{\Delta\Theta'_3} = \frac{\Delta\Theta_4}{\Delta\Theta'_4} = \frac{\Delta\Theta_5}{\Delta\Theta'_5} = \frac{\Delta\Theta_6}{\Delta\Theta'_6} = \frac{\Delta\Theta_7}{\Delta\Theta'_7}. \quad (63)$$

Gleichwie oben können auch hier zur Bestimmung der einzelnen Brüche die Zähler und Nenner zu einem gemeinschaftlichen Bruche summirt werden, und zwar gleichviel, ob die einzelnen Brüche mit positiven oder negativen Zeichen in die Summe eingehen; man schliefse die letztern nicht aus, vertausche daher S mit S', wähle aber die Zeichen so, dafs sie wenigstens den numerischen Werthen in einer Substanz entsprechen. Dann wird

$$\frac{\varDelta\Theta_1}{\varDelta\Theta'_1} = \frac{S'\varDelta\Theta}{S'\varDelta\Theta'} \quad \text{oder} \quad \frac{\varDelta\Theta_1}{S'\varDelta\Theta} = \frac{\varDelta\Theta'_1}{S'\varDelta\Theta'}; \quad \frac{\varDelta\Theta_2}{S'\varDelta\Theta} = \frac{\varDelta\Theta'_2}{S'\varDelta\Theta'} \text{ u. s. w.;}$$

die übrigen Substanzen liefern

$$\frac{\varDelta\Theta_1}{S'\varDelta\Theta} = \frac{\varDelta\Theta''_1}{S'\varDelta\Theta''}; \quad \frac{\varDelta\Theta_2}{S'\varDelta\Theta} = \frac{\varDelta\Theta''_2}{S'\varDelta\Theta''} \text{ u. s. w.}$$

also überhaupt

$$\frac{\varDelta\Theta_1}{S'\varDelta\Theta} = \frac{\varDelta\Theta'_1}{S'\varDelta\Theta'} = \frac{\varDelta\Theta''_1}{S'\varDelta\Theta''} = \frac{\varDelta\Theta'''_1}{S'\varDelta\Theta'''} = \ldots.$$

$$\frac{\varDelta\Theta_2}{S'\varDelta\Theta} = \frac{\varDelta\Theta'_2}{S'\varDelta\Theta'} = \frac{\varDelta\Theta''_2}{S'\varDelta\Theta''} = \frac{\varDelta\Theta'''_2}{S'\varDelta\Theta'''} = \ldots. \text{ u. s. w.}$$

woraus die Endgleichungen entstehen:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta\Theta_1 &= \frac{\Sigma'\varDelta\Theta_1}{\Sigma S'\varDelta\Theta}.S'\varDelta\Theta, \\ \varDelta\Theta_2 &= \frac{\Sigma'\varDelta\Theta_2}{\Sigma S'\varDelta\Theta}.S'\varDelta\Theta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varDelta\Theta_7 &= \frac{\Sigma'\varDelta\Theta_7}{\Sigma S'\varDelta\Theta}.S'\varDelta\Theta. \end{aligned}\right\} \quad (64)$$

Gesetzt die nach den vorstehenden Gleichungen berechneten Werthe von $\varDelta\Theta_1, \varDelta\Theta_2 \ldots. \varDelta\Theta_7$ geben zu $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots. \vartheta_7$ hinzugefügt, noch keine den Beobachtungen ganz entsprechenden Resultate, so trenne man $\varDelta\Theta_1$ in $\varDelta\vartheta_1 + \varDelta^2\Theta_1$, $\varDelta\Theta_2$ in $\varDelta\vartheta_2 + \varDelta^2\Theta_2$ u. s. w., lasse die aus (64) gefundenen Werthe $\varDelta\vartheta_1, \varDelta\vartheta_2 \ldots.$ sein, und suche nun noch $\varDelta^2\Theta_1, \varDelta^2\Theta_2 \ldots.$ zu berechnen. In (64) $\varDelta\vartheta_1$ statt $\varDelta\Theta_1$ u. s. w. gesetzt, folgt durch Summirung der sieben Gleichungen

$$S'\varDelta\vartheta = S'\varDelta\Theta \quad (65)$$

und auch

$$S\varDelta\vartheta = S\varDelta\Theta, \quad (66)$$

weil von Formel (63) an statt der Summe S' auch S genommen werden konnte. Substituirt man in (65) und (66) für $\varDelta\Theta_1$ seinen Werth $\varDelta\vartheta_1 + \varDelta^2\Theta_1$, statt $\varDelta\Theta_2$ seinen Werth $\varDelta\vartheta_2 + \varDelta^2\Theta_2$ u. s. w., so findet man

$$S\varDelta^2\Theta = 0 \quad \text{und} \quad S'\varDelta^2\Theta = 0. \quad (67)$$

Wir nehmen jetzt zur weitern Berechnung aus den Gleichungen (44), (45), (46) .... vier Glieder, z. B.

$$K_m\Theta_m + K_n\Theta_n + K_p\Theta_p + K_q\Theta_q = 0 \quad (68)$$

$$K_m\Theta'_m + K_n\Theta'_n + K_p\Theta'_p + K_q\Theta'_q = 0, \text{ u. s. w.}$$

ziehen daraus

$$K_m\Sigma\Theta_m + K_n\Sigma\Theta_n + K_p\Sigma\Theta_p + K_q\Sigma\Theta_q = 0,$$

haben ferner wegen (53)

$$K_m\vartheta_m + K_n\vartheta_n + K_p\vartheta_p + K_q\vartheta_q = 0,$$

welche Gleichung wieder mit (68) zusammengestellt

$$K_m \Delta\vartheta_m + K_n \Delta\vartheta_n + K_p \Delta\vartheta_p + K_q \Delta\vartheta_q = 0 \quad (69)$$

liefert. Da diese Gleichung auf jedes Medium übertragen werden kann, so ist auch

$$K_m \Delta\vartheta'_m + K_n \Delta\vartheta'_n + K_p \Delta\vartheta'_p + K_q \Delta\vartheta'_q = 0,$$

$$K_m \Delta\vartheta''_m + K_n \Delta\vartheta''_n + K_p \Delta\vartheta''_p + K_q \Delta\vartheta''_q = 0 \text{ u. s. w.},$$

und durch Summirung

$$K_m \Sigma'\Delta\vartheta_m + K_n \Sigma'\Delta\vartheta_n + K_p \Sigma'\Delta\vartheta_p + K_q \Sigma'\Delta\vartheta_q = 0. \quad (70)$$

Vergleicht man endlich (70) mit (64), so ergiebt sich

$$K_m \Delta^2 \Theta_m + K_n \Delta^2 \Theta_n + K_p \Delta^2 \Theta_p + K_q \Delta^2 \Theta_q = 0. \quad (71)$$

Es seien in dieser Gleichung zuerst $m = 1$, $n = 2$, $p = 3$, q aber nach und nach 4, 5, 6, 7, so lassen sich $\Delta^2\Theta_4$, $\Delta^2\Theta_5$, $\Delta^2\Theta_6$ und $\Delta^2\Theta_7$ durch $\Delta^2\Theta_1$, $\Delta^2\Theta_2$, $\Delta^2\Theta_3$ ausdrücken; die Substitution dieser Werthe in

$$S\Delta^2\Theta = 0 \quad \text{und} \quad S'\Delta^2\Theta = 0$$

liefert zwei Gleichungen, aus denen $\Delta^2\Theta_3$ eliminirt werden kann; so kommt man auf eine lineare Gleichung zwischen $\Delta^2\Theta_1$ und $\Delta^2\Theta_2$, aus der

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2} = N$$

folgt. Die zweite Substanz giebt

$$\frac{\Delta^2\Theta'_1}{\Delta^2\Theta'_2} = N,$$

und man erhält wieder

$$\frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta_2} = \frac{\Delta^2\Theta'_1}{\Delta^2\Theta'_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta^2\Theta_1}{\Delta^2\Theta'_1} = \frac{\Delta^2\Theta_2}{\Delta^2\Theta'_2}. \quad (72)$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit (62) lehrt sattsam, dafs man es hier wieder ganz mit demselben Gange der Rechnung zu thun hat; man wird also die Endgleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2\Theta_1 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_1}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta} \cdot S''\Delta^2\Theta, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta^2\Theta_7 = \dfrac{\Sigma''\Delta^2\Theta_7}{\Sigma''S''\Delta^2\Theta} \cdot S''\Delta^2\Theta. \end{array}\right\} \quad (73)$$

Sollten auch diese Werthe noch nicht für die Beobachtungen genügen, so ist eine neue Trennung von $\Delta^2\Theta$ in $\Delta^2\vartheta + \Delta^3\Theta$ erforderlich; doch bietet die weitere Berechnung nicht Neues dar. Endlich erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_1 = \vartheta_1 + \Delta\vartheta_1 + \Delta^2\vartheta_1 + \Delta^3\vartheta_1 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Theta_7 = \vartheta_7 + \Delta\vartheta_7 + \Delta^2\vartheta_7 + \Delta^3\vartheta_7 + \dots \end{array}\right\} \quad (74)$$

Cauchy hat seine Berechnung bis auf $\Delta^3\vartheta$ ausgedehnt, und ist damit in die Grenzen der gestatteten Fehler gekommen. Da die von ihm gefundenen Resultate mehr Zutrauen verdienen, als selbst die Beobachtungen, so will ich sie in der folgenden Tafel zusammenstellen, in der ich die schon früher mitgetheilten Beobachtungen übergehe.

	Wasser 1ster Versuch.	Wasser 2ter Versuch.	Anflösung von Potasche.	Terpenthinöl.	Crownglas No. 13.	Crownglas No. 9.
B	1,330939	1,330979	1,339620	1,470507	1,524301	1,525836
C	1,331694	1,331711	1,400515	1,471527	1,525310	1,526856
D	1,333582	1,333574	1,402808	1,474446	1,527982	1,529567
E	1,335859	1,335849	1,405636	1,478333	1,531372	1,533015
F	1,337805	1,337787	1,408086	1,481745	1,534348	1,536039
G	1,341293	1,341265	1,412567	1,488196	1,539896	1,541681
H	1,344189	1,344159	1,416376	1,493867	1,544685	1,546556

	Crownglas *M.*	Flintglas No. 3.	Flintgl. No. 30.	Flintgl. No. 23. 1ster Versuch.	Flintgl. No. 23. 2ter Versuch.	Flintgl. No. 13.
B	1,554774	1,602044	1,623577	1,626565	1,626584	1,627751
C	1,555932	1,603810	1,625463	1,628448	1,628464	1,629693
D	1,559079	1,608488	1,630605	1,633664	1,633659	1,635032
E	1,563148	1,614525	1,637343	1,640549	1,640519	1,642014
F	1,556744	1,620046	1,643472	1,646775	1,646743	1,648268
G	1,573531	1,630780	1,655393	1,658851	1,658844	1,660292
H	1,579471	1,640361	1,666079	1,669683	1,669702	1,671048

§. V.

Die Schwingungsgleichungen des reflectirten und gebrochenen Strahles. Circulare und elliptische Polarisation.

Um das Gesetz der Brechung abzuleiten kommt es, wie wir gesehen haben, nur darauf an, dafs die Wellenebenen des einfallenden und des gebrochenen Lichtes jede nach der ihr zukommenden Schnelligkeit ungestört fortrücken, und dafs die Schwingungen der Aetherthеilchen in beiden gleichzeitig sind. Allein aufser dieser Uebereinstimmung nach der Richtung der Fortbewegung wird zur Erhaltung eines vollständigen Zusammenhangs und eines festen Ineinandergreifens der beiden Wellensysteme auch noch eine völlige Uebereinstimmung in den Schwingungen selbst verlangt; in beiden Medien mufs, wie es bei einer Welle in demselben Medium der Fall ist, die Schnelligkeit der Schwingungen in den benachbarten Theilchen dieselbe sein. Sollte nämlich an einem Orte, wo die beiden Medien zusammenstofsen, die Schwingungsschnelligkeit in dem einen gröfser als in dem andern sein, so würde an dieser Stelle eine Lücke oder Unterbrechung zwischen den beiden Wellensystemen entstehen, die doch, wenigstens bei vollkommen durchsichtigen Medien, vermieden werden soll. Zur gröfsern Anschaulichkeit sei AB (Fig. 21.) ein Durchschnitt der gegen die Ebene des Papiers senkrecht liegenden Trennungsfläche der beiden Medien, $CDEF$ sei die einfallende Welle, ihre Wellenebene CG und der Einfallswinkel $GCF = \vartheta$; die gebrochene Welle sei $FICK$, ihre Wellenebene FH und $\angle CFH = \vartheta'$. Ferner möge das einfallende Licht zuerst längs CG und das gebrochene längs FH polarisirt sein, so dafs die Schwingungen nur nach CG und FH erfolgen. Das Gesetz

der Brechung verlangte nun ein gleichmäſsiges Fortrücken der Wellen, nämlich $FG = nCH$; das vollständige Ineinandergreifen beider Wellen verlangt dazu noch, daſs an der Trennungsfläche AB nach jeder beliebigen Richtung die Schwingungsschnelligkeit in dem einen Medium dieselbe sei, wie in dem andern. Um dessen gewiſs zu sein, braucht man nur die Schwingungsschnelligkeit längs AB und senkrecht darauf zu betrachten. Wir setzen die Schwingungsschnelligkeit im ersten Medium nach $CG = A$, im zweiten nach $HF = B$, so ist sie längs CF im ersten $= A \cos\vartheta$, im andern $= B \cos\vartheta'$, senkrecht zu CF im ersten $= A \sin\vartheta$, im anderen $B \sin\vartheta'$. Soll also der Zusammenhang unter beiden Wellensystemen vollständig sein, so müssen jene Ausdrücke sowohl als diese unter einander gleich sein, folglich $A \cos\vartheta = B \cos\vartheta'$ und $A \sin\vartheta = B \sin\vartheta'$. Wenn zweitens das einfallende Licht senkrecht gegen CG und das gebrochene senkrecht gegen FH polarisirt ist, so schwingen die Aethertheilchen in der Trennungsfläche selbst; bieten daher beide Wellensysteme nach dieser einen Richtung eine gleiche Schwingungsschnelligkeit dar, so besteht sie auch nach jeder andern Richtung. — Die Forderung nach einer gleichen Schwingungsschnelligkeit an jedem Orte, wo die beiden Wellensysteme zusammenstoſsen, ist offenbar nicht hier erst willkürlich aufgenommen, sondern sie gilt ebenso gut in der Mechanik in dem Satze von der Gleichheit der Kraft und der Wirkung; wir haben sie auch oben unter die Grundsätze eingeführt, wenn wir für vollkommen durchsichtige Medien die Erhaltung der lebendigen Kräfte postulirten. Einiges Nachdenken nämlich muſs zeigen, daſs bei Wellenschwingungen die lebendigen Kräfte nicht anders erhalten werden können, als wenn jede Schwingung eine ihr gleiche in der Richtung des Strahls erzeugt, vorausgesetzt, daſs dabei die bewegte Masse nicht zunimmt; aber längs der Trennungsfläche und senkrecht gegen sie sind die erregten Aethertheilchen beider Medien durch dieselbe Linie CF bestimmt, und folglich muſs in beiden hier an dieser Stelle eine gleich schnelle Schwingung erfolgen. Ein ganz anderes ist es dagegen, wenn unserer Forderung durch die beiden Wellensysteme allein nicht genügt werden kann, wie es in der That fast immer der Fall ist; dann bleibt nichts anderes übrig, als daſs sich aus einem Theile des einfallenden Wellensystems ein neues reflectirtes erzeuge, und daſs nun durch alle drei zusammen, durch das einfallende, das reflectirte und das gebrochene Wellensystem, der gestellten Forderung ein Genüge geschehe. Die Richtung dieses reflectirten Lichtes folgt aus dem Gesetz der Brechung, wenn man $n = 1$ setzt; es wendet sich unter einem dem Einfallswinkel gleichen Winkel nach der entgegengesetzten Seite zurück, giebt also das Wellensystem $LFCM$, dessen Wellenebene FN und wo $\angle NFC = \vartheta$ ist. — Jedoch ehe wir zur Anwendung der vorigen Bedingungen übergehen, wollen wir uns über die Zeichen erklären, die wir den Schwingungen je nach ihrer Richtung beilegen werden. Wir gehen hierbei von der Stellung des Beobachters aus, in welcher er einen gegebenen Lichtstrahl analysirt; er wende also sein Gesicht gegen die Richtung der einfallenden Strahlen nach CD und ihm sei, sofern die reflectirende Fläche horizontal liegt, die Schwingung von unten nach oben, von C nach G positiv, ebenso senkrecht dazu die Schwingung von der Rechten zur Linken, welche nach unserer Zeichnung von der beschriebenen Fläche nach hinten geht. Für die beiden andern Strahlen sind hierdurch die Zeichen gegeben; beim gebrochenen Lichte behält der Beobachter seine Stellung und die Schwingung von H nach F, desgleichen von F senkrecht nach hinten ist positiv; im reflectirten Lichte entspricht der Seite CD vom einfallenden die Seite CM, und LF der Seite EF, der Beobachter sollte also nach LF hinsehen, ihm ginge die Richtung von N nach F von

unten nach oben, und die senkrechte Schwingung von der gezeichneten Fläche nach vorn von der Rechten zur Linken, somit wären beide positiv. Allein da Neumann, der für dieses Capitel als Vorgänger gelten mufs, den Beobachter grade umgekehrt gestellt, und demnach die Richtung von F nach N und für die zweite Polarisationsaxe die Richtung von F senkrecht nach hinten positiv genommen hat, so bestimmt uns dieses seinem Beispiele zu folgen, und im reflectirten Lichte die umgekehrten Zeichen zu gebrauchen. Nur Fresnels Angaben mufsten vermieden werden, weil sie in dem Folgenden auf Schwierigkeiten führen, die nur mit ihnen verbunden sind. Nach diesen Vorbereitungen sei grade an der Trennungsfläche die Schwingungsgleichung eines einfallenden nach CG polarisirten Strahles:

$$\xi'_s = S \sin \frac{2\pi t}{T},$$

des reflectirten:

$$\xi''_s = R_s \sin \frac{2\pi t}{T},$$

des gebrochenen:

$$\xi'''_s = D_s \sin \frac{2\pi t}{T},$$

denn da alle drei der Zeit nach vollkommen correspondirende Strahlen sind, so müssen t und T in ihnen gleich sein.

Ihre Schwingungsschnelligkeiten sind:

$$\frac{d\xi'_s}{dt} = \frac{2\pi}{T} S \cos \frac{2\pi t}{T},$$

$$\frac{d\xi''_s}{dt} = \frac{2\pi}{T} R_s \cos \frac{2\pi t}{T},$$

$$\frac{d\xi'''_s}{dt} = \frac{2\pi}{T} D_s \cos \frac{2\pi t}{T};$$

somit folgt, um die Gleichheit der Schwingungsschnelligkeiten in beiden Medien längs CF zu erhalten:

$$\frac{2\pi}{T} S \cos\vartheta \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{T} R_s \cos\vartheta \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi}{T} D_s \cos\vartheta' \cos \frac{2\pi t}{T}$$

oder

$$S \cos\vartheta - R_s \cos\vartheta = D_s \cos\vartheta', \quad (1)$$

und wegen der Gleichheit der Schwingungsschnelligkeiten senkrecht zu AB:

$$\frac{2\pi}{T} S \sin\vartheta \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{T} R_s \sin\vartheta \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi}{T} D_s \sin\vartheta' \cos \frac{2\pi t}{T}$$

oder

$$S \sin\vartheta + R_s \sin\vartheta = D_s \sin\vartheta'. \quad (2)$$

Ferner sei die Gleichung eines einfallenden senkrecht gegen $FECD$ polarisirten Strahls:

$$\xi'_p = P \sin \frac{2\pi t}{T},$$

des reflectirten:

$$\xi''_p = R_p \sin \frac{2\pi t}{T},$$

des gebrochenen:

$$\xi'''_p = D_p \sin \frac{2\pi t}{T},$$

so erhält man ihre Schwingungsschnelligkeiten:

$$\frac{d\xi'_p}{dt} = \frac{2\pi}{T} P \cos\frac{2\pi t}{T},$$

$$\frac{d\xi''_p}{dt} = \frac{2\pi}{T} R_p \cos\frac{2\pi t}{T},$$

$$\frac{d\xi'''_p}{dt} = \frac{2\pi}{T} D_p \cos\frac{2\pi t}{T},$$

und wegen der Gleichheit dieser Schwingungsschnelligkeiten längs der Trennungsfläche der beiden Medien:

$$\frac{2\pi}{T} P \cos\frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi}{T} R_p \cos\frac{2\pi t}{T} = \frac{2\pi}{T} D_p \cos\frac{2\pi t}{T}$$

oder

$$P + R_p = D_p. \quad (3)$$

Zu diesen Gleichungen kommt für jeden Fall noch eine neue hinzu, die der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte liefert. Es sei nämlich die Masse des in gleicher Zeit erregten Aethers in der einfallenden und reflectirten Welle $= M = 1$, in der gebrochenen $= M'$, so folgt für den ersten Fall:

$$S^2 \left(\frac{2\pi}{T}.\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 = R_s^2 \left(\frac{2\pi}{T}.\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 + D_s^2 \left(\frac{2\pi}{T}.\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 M'$$

oder

$$S^2 - R_s^2 = D_s^2 M', \quad (4)$$

für den andern:

$$P^2 \left(\frac{2\pi}{T}.\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 = R_p^2 \left(\frac{2\pi}{T}.\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 + D_p^2 \left(\frac{2\pi}{T}.\cos\frac{2\pi t}{T}\right)^2 M'$$

oder

$$P^2 - R_p^2 = D_p^2 M'. \quad (5)$$

Endlich sind die Intensitäten der vorigen Wellensysteme nach §. II.:

$$S^2, \quad R_s^2, \quad D_s^2 M', \quad P^2, \quad R_p^2, \quad D_p^2 M'.$$

Mittelst der Gleichungen (1) bis (5) findet sich weiter keine Schwierigkeit, die Schwingungsweite und Intensität des gebrochenen und reflectirten Lichtes aus der Intensität des einfallenden zu berechnen. Denn nimmt man, um den allgemeinsten Fall zu haben, das einfallende Licht als ein solches an, das nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zugleich polarisirt ist, und läfst dabei die in einer Welle erregte Masse des Aethers in der Luft $= 1$ sein, so mag, wie bisher, beim Uebergange von Luft in ein anderes Medium ϑ der einfallende, ϑ' der gebrochene Winkel sein; ferner sei die Intensität des einfallenden Lichtes, so weit sie von der Schwingung nach CG abhängig ist, $= S^2$, soweit sie dagegen von der senkrecht dazu erfolgenden Schwingung abhängt, $= P^2$; die Intensitäten der gebrochenen und reflectirten Wellen sollen auch hier R_s^2, R_p^2, $D_s^2 M'$, $D_p^2 M'$ sein. Hiernach haben wir die Gleichungen:

$$S \cos\vartheta - R_s \cos\vartheta = D_s \cos\vartheta', \quad (6)$$

$$S \sin\vartheta + R_s \sin\vartheta = D_s \sin\vartheta', \quad (7)$$

$$P + R_p = D_p, \quad (8)$$

und wegen der Erhaltung der lebendigen Kräfte

$$S^2 + P^2 = R_s^2 + R_p^2 + D_s^2 M' + D_p^2 M'$$

oder

$$S^2 + P^2 - R_s^2 - R_p^2 = (D_s^2 + D_p^2)\frac{\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sin\vartheta\cos\vartheta}, \quad (9)$$

da sich die in gleichen Zeiten erregten Massen des Aethers in der einfallenden und gebrochenen Welle wie $\sin\vartheta\cos\vartheta : \sin\vartheta'\cos\vartheta'$ verhalten.

Aus (6) und (7) folgt nun:

$$R_s = -S\frac{\sin(\vartheta-\vartheta')}{\sin(\vartheta+\vartheta')} \quad (10); \qquad R_s^2 = S^2\frac{\sin^2(\vartheta-\vartheta')}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} \quad (11);$$

$$D_s = S\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\vartheta')} \quad (12); \qquad D_s^2 M' = S^2\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} \quad (13).$$

Multiplicirt man (6) mit (7), so erhält man

$$S^2 - R_s^2 = D_s^2\frac{\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sin\vartheta\cos\vartheta}$$

und durch Substitution in (9)

$$S^2 - R_p^2 = D_p^2\frac{\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sin\vartheta\cos\vartheta},$$

woraus man endlich durch Division mit (8) zieht

$$P - R_p = D_p\frac{\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sin\vartheta\cos\vartheta}. \quad (14)$$

Beide Gleichungen (8) und (14) geben:

$$R_p = P\frac{\tang(\vartheta-\vartheta')}{\tang(\vartheta+\vartheta')} \quad (15); \qquad R_p^2 = P^2\frac{\tang^2(\vartheta-\vartheta')}{\tang^2(\vartheta+\vartheta')} \quad (16);$$

$$D_p = P\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\vartheta')\cos(\vartheta-\vartheta')} \quad (17); \qquad D_p^2 M' = P^2\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos^2(\vartheta-\vartheta')} \quad (18).$$

Die Formeln (10) bis (13) und (15) bis (18) stimmen aufs beste mit den von Fresnel, Arago, Brewster und Seebeck angestellten Beobachtungen überein. Wir wollen die Hauptfälle einzeln durchgehen.

Das in Luft auf eine andere Substanz unter dem Winkel ϑ auffallende Licht sei gewöhnliches, dessen Schwingungen also mit gleicher Weite längs CG und senkrecht dazu erfolgen; es besitze eine Intensität $= 2$, so ist $S = P = 1$, und die Schwingungsweiten des reflectirten Lichtes sind

$$R_s = -\frac{\sin(\vartheta-\vartheta')}{\sin(\vartheta+\vartheta')}, \quad (19)$$

$$R_p = \frac{\tang(\vartheta-\vartheta')}{\tang(\vartheta+\vartheta')}. \quad (20)$$

Nach (20) wird $R_p = 0$, d. h. das reflectirte Licht ist nach NF vollständig polarisirt, wenn $\tang(\vartheta+\vartheta') = \infty$ oder $\vartheta+\vartheta' = 90^\circ$ ist. In diesem Falle bildet der reflectirte Strahl mit dem gebrochenen einen rechten Winkel. Brewster war der erste, der den Winkel der vollständigen Polarisation durch $\tang\vartheta = n$ bestimmte, wo n den Brechungsexponenten bedeutet; da nämlich $\sin\vartheta = n\sin\vartheta'$ ist, so folgt wegen $\vartheta+\vartheta' = 90^\circ$, $\sin\vartheta' = \cos\vartheta$, also $\tang\vartheta = n$. Zahlreiche Beobachtungen haben die Gültigkeit der Formel bewiesen, und Seebecks wiederholte Messungen haben noch gezeigt, welche Sorgfalt man auf die Politur der reflectirenden Fläche zu richten hat, um genaue Resultate zu erhalten. — Unter andern beliebigen Einfallswinkeln ist die Intensität des reflectir-

ten Lichtes =

$$I_r = \frac{\sin^2(\vartheta - \vartheta')}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')} + \frac{\tan^2(\vartheta - \vartheta')}{\tan^2(\vartheta + \vartheta')}. \quad (21)$$

Seiner Art nach ist dasselbe, weil R_s und R_p nicht gleich sind, nicht mehr ein gewöhnliches, sondern ein schon theilweise polarisirtes Licht, in dem die Aetherschwingungen vorwiegend nach einer Seite erfolgen.

Am sichersten wird die Richtigkeit der Formeln erwiesen, wenn man sich des polarisirten Lichtes bedient; es sei also das einfallende Licht von einer Intensität $= 1$ unter einem Azimuth x polarisirt, wo x vom Lothe auf der reflectirenden Fläche an gezählt und nach der Linken des Beobachters positiv genommen werde; dann ist $S = \cos x$, $P = \sin x$ und beide Schwingungen bilden auch nach der Reflexion polarisirtes Licht.

Aus (10) und (15) folgt:

$$R_s = -\cos x \frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{\sin(\vartheta + \vartheta')}; \qquad R_p = \sin x \frac{\tan(\vartheta - \vartheta')}{\tan(\vartheta + \vartheta')};$$

somit erhält man zur Bestimmung des Azimuth φ des reflectirten Lichtes

$$\tan\varphi = \frac{R_p}{R_s} = -\tan x \frac{\cos(\vartheta + \vartheta')}{\cos(\vartheta - \vartheta')}, \quad (22)$$

und für seine Intensität I_r:

$$I_r = R_s^2 + R_p^2 = \cos^2 x \frac{\sin^2(\vartheta - \vartheta')}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')} + \sin^2 x \frac{\tan^2(\vartheta - \vartheta')}{\tan^2(\vartheta + \vartheta')}. \quad (23)$$

Folgende Beobachtungen Fresnels bestätigen die Gleichung (22):

Reflexion von Glas, $n = 1{,}51$; $x = 45°$.

ϑ.	φ beob.	φ berechn.	ϑ.	φ beob.	φ berechn.	ϑ.	φ beob.	φ berechn.
24°	−38° 55′	−37° 54	60°	+ 5° 15′	+ 5° 29′	87°	+40° 55′	+41° 36′
39	−24 35	−24 38	70	+19 52	+20 24	88	+41 15	+42 44
49	−11 45	−11 52	80	+32 45	+33 25	89	+44 35	+43 52
56½	− 0 0	− 0 0	85	+38 55	+39 19			

Reflexion von Wasser, $n = 1{,}333$; $x = 45°$.

60°	+10° 20′	+10° 51′	80°	+36° 20′	+35° 49′
70	+25 20	+24 48	85	+40 50	+40 32

Ferner können hierher Brewsters Beobachtungen des von der Säulenfläche eines Quarzcrystalls reflectirten Lichtes gezogen werden. Bei $\vartheta = 70°$ und $x = 45°$ war $\varphi = 26° 20'$; dieser Werth in (22) substituirt giebt $\tan\varphi = \tan x \tan 26° 24'$, wonach die folgenden Beobachtungen berechnet sind.

x	φ beob.	φ ber.	x	φ beob.	φ ber.	x	φ beob.	φ ber.
0°	0° 0′	0° 0′	40°	23° 30′	22° 40′	60°	40° 0′	40° 45′
10	4 54	4 29	45	26 20	26 27	70	53 0	53 49
20	10 0	10 16	50	30 0	30 40	80	70 0	70 29
30	15 50	16 2	55	35 30	35 23	90	90 0	90 0
35	20 0	19 12						

In Betreff des gebrochenen Lichtes findet man, wenn gewöhnliches Licht von einer Intensität $= 2$ einfällt, die Intensität desselben nach (13) und (18) =

$$I' = \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')} + \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')\cos^2(\vartheta - \vartheta')}. \quad (24)$$

Fällt dagegen unter dem Azimuth x polarisirtes Licht von einer Intensität $= 1$ ein, so erhält man das Azimuth φ' des gebrochenen aus

$$\operatorname{ctg}\varphi' = \frac{D_s}{D_p} = \operatorname{ctg}x \cos(\vartheta - \vartheta'), \quad (25)$$

und seine Intensität:

$$I' = \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} \cos^2 x + \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos^2(\vartheta-\vartheta')} \sin^2 x. \quad (26)$$

Zur Bestätigung von (25) läfst man am besten polarisirtes Licht auf eine Glasplatte mit genau zu einander parallelen Flächen auffallen und mifst das Azimuth der durch die Glasplatte hindurchgegangenen Strahlen. Hier ist nach dem Durchgange durch die erste Oberfläche

$$D_s = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\vartheta')} \cos x,$$

und nach dem Durchgange durch die zweite Oberfläche, wo ϑ in ϑ' und ϑ' umgekehrt in ϑ übergeht:

$$D'_s = \frac{4\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} \cos x;$$

ebenso findet man

$$D_p = \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+\vartheta')\cos(\vartheta-\vartheta')} \sin x,$$

$$D'_p = \frac{4\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos(\vartheta-\vartheta')} \sin x,$$

folglich das Azimuth φ' der durch die Glasplatte hindurchgegangenen Strahlen aus

$$\operatorname{ctg}\varphi' = \frac{D'_s}{D'_p} = \operatorname{ctg}x \cos^2(\vartheta - \vartheta'). \quad (27)$$

Brewsters Beobachtungen an einer gut gekühlten Glastafel, wo $n = 1{,}510$ war, gaben für $x = 45°$:

ϑ.	ϑ'.	φ beob.	φ berechn.	ϑ.	ϑ'.	φ beob.	φ berechn.
0°	0° 0′	45° 0′	45° 0′	55°	33° 52′	48° 54′	48° 59′
10	6 36½	45 13	45 6	60	35 0	50 7	50 36
20	13 5	45 27	45 25	65	36 53	51 48	52 7
25	16 15	45 32	4 5 40	70	38 29	53 7	53 59
30	19 20	45 40	46 0	75	39 45	54 55	56 18
35	22 19	46 12	46 25	80	40 42	57 10	59 5
40	25 10	46 30	46 56	85	41 17	60 45	62 24
45	27 55	46 47	47 34	86	41 21	61 39	63 9
50	30 29	47 42	48 24	90	41 28		66 19

Ferner war bei $x = 45°$ und $\vartheta = 80°$, $\varphi' = 58° 40'$, dadurch geht (27) in $\operatorname{ctg}\varphi' = \operatorname{ctg}x \operatorname{ctg} 58° 40'$ über und dient zur Berechnung der folgenden Messungen:

x	φ beob.	φ berechn.	x	φ beob.	φ berechn.	x	φ beob.	φ berechn.
0°	0° 0′	0° 0′	30°	44° 10′	43° 57′	65°	74° 8′	74° 24′
$2\frac{1}{2}$	7 10	7 20	35	49 38	49 28	70	76 56	77 42
5	9 40	9 19	40	54 36	54 13	75	79 20	80 53
10	17 10	16 25	45	58 40	59 5	80	83 33	83 58
15	24 42	24 6	50	63 10	63 19	85	86 23	86 0
20	32 30	31 19	55	66 58	67 15	90	90 0	90 0
25	39 15	37 54	60	70 18	70 56			

Ein ganz besonderes Verhältnifs tritt ein, wenn polarisirtes Licht im Innern eines Glasprismas eine totale Reflexion erleidet. Läfst man nämlich das Licht, um den einfachsten Fall zu haben, unter einem Azimuth von 45° und mit einer Intensität $= 2$ reflectirt werden, so ist $S = 1$, $P = 1$ und

$$R_s = -\frac{\sin(\vartheta - \vartheta')}{\sin(\vartheta + \vartheta')}; \qquad R_p = \frac{\operatorname{tang}(\vartheta - \vartheta')}{\operatorname{tang}(\vartheta + \vartheta')};$$

aber $\sin\vartheta' = n \sin\vartheta$ wird bei der totalen Reflexion gröfser als der Radius, so dafs ϑ' einen unmöglichen Werth erhält. Um für diesen Fall die Formeln bequemer zu übersehen, nehme man

$$R_s = -\frac{\sin\vartheta \cos\vartheta' - \cos\vartheta \sin\vartheta'}{\sin\vartheta \cos\vartheta' + \cos\vartheta \sin\vartheta'}$$

$$= \frac{1 + n^2 - 2n^2 \sin^2\vartheta}{n^2 - 1} - \frac{2n\sqrt{(1-\sin^2\vartheta)}\sqrt{(n^2\sin^2\vartheta - 1)}\sqrt{-1}}{n^2 - 1}$$

oder, zur Abkürzung $n^2 = c$ und $\sin^2\vartheta = x$ gesetzt,

$$R_s = \frac{1 + c - 2cx}{c - 1} - \frac{2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}\sqrt{-1}}{c-1}; \qquad (28)$$

ebenso findet man

$$R_p = \frac{\operatorname{tang}(\vartheta - \vartheta')}{\operatorname{tang}(\vartheta + \vartheta')} = \frac{1 - \sin^2\vartheta + n^2 - n^4 \sin^2\vartheta}{1 - \sin^2\vartheta - n^2 + n^4 \sin^2\vartheta} - \frac{2n\sqrt{(1-\sin^2\vartheta)}\sqrt{(n^2\sin^2\vartheta - 1)}\sqrt{-1}}{1 - \sin^2\vartheta - n^2 + n^4\sin^2\vartheta}$$

oder

$$R_p = -\frac{(c^2+1)x - c - 1}{(c-1)[(c+1)x-1]} - \frac{2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}\sqrt{-1}}{(c-1[(c+1)x-1]}. \qquad (29)$$

Beide Formeln für R_s und R_p sind aus einem möglichen und einem unmöglichen Gliede zusammengesetzt, was darauf hindeutet, dafs sie nicht in dieser Weise neben einander bestehen; offenbar bilden sie beide ein Wellensystem, das nicht an der reflectirenden Fläche, sondern etwas früher oder später beginnt. Man nehme daher an, dafs der mögliche Theil in R_s die Schwingungsweite eines Strahls sei, welcher, wie es bisher der Fall war, von der reflectirenden Oberfläche unmittelbar ausgeht, der unmögliche Theil dagegen, von $\sqrt{-1}$ befreit, beginne der Zeit nach um γ später, dann hat man, wenn man zur Abkürzung $\frac{1+c-2cx}{c-1} = A$ und $\frac{2\sqrt{c(1-x)(cx-1)}}{c-1} = B$ setzt, nach §. 11.:

$$\left(A - B\cos\frac{2\pi\gamma}{T}\right)^2 + \left(-B\sin\frac{2\pi\gamma}{T}\right)^2 = R_s^2$$

oder, weil wegen der Erhaltung der lebendigen Kräfte $R_s^2 = S^2 = 1$ ist,

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\frac{2\pi\gamma}{T} = 1.$$

Man findet aber $A^2 + B^2 = 1$, folglich ist

$$\cos\frac{2\pi y}{T} = 0.$$

Setzt man hiernach die Schwingungsgleichung beider Strahlen:

$$\xi_s = \sin\frac{2\pi\alpha}{T},$$

so ist

$$\sin\frac{2\pi\alpha}{T} = -B\sin\frac{2\pi y}{T} = -B, \quad (30)$$

und

$$\cos\frac{2\pi\alpha}{T} = A - B\cos\frac{2\pi y}{T} = A. \quad (31)$$

Ganz auf dieselbe Weise trenne man R_p in sein mögliches und unmögliches Glied, nenne jenes C, dieses D, und lasse das letztere der Zeit noch um z später beginnen, als wenn der Strahl unmittelbar von der reflectirenden Fläche ausginge; dann erhält man auch hier

$$\left(-C - D\cos\frac{2\pi z}{T}\right)^2 + \left(-D\sin\frac{2\pi z}{T}\right)^2 = R_p^2 = 1,$$

oder, wegen $C^2 + D^2 = 1$,

$$\cos\frac{2\pi z}{T} = 0.$$

Die Schwingungsgleichung beider Strahlen

$$\xi_p = \sin\frac{2\pi\beta}{T}$$

gesetzt, giebt hier

$$\sin\frac{2\pi\beta}{T} = -D\sin\frac{2\pi z}{T} = -D, \quad (32)$$

und

$$\cos\frac{2\pi\beta}{T} = -C - D\cos\frac{2\pi z}{T} = -C. \quad (33)$$

Die beiden Zeitabstände α und β sind nicht gleich, deshalb geht der Strahl R_s dem andern R_p um eine Zeit $\alpha - \beta$ voran, und man findet diese Gröfse durch

$$\cos\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{T} = \cos\frac{2\pi\alpha}{T}\cos\frac{2\pi\beta}{T} + \sin\frac{2\pi\alpha}{T}\sin\frac{2\pi\beta}{T} = -AC + BD$$

oder

$$\cos\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{T} = \frac{2n^2\sin^4\vartheta - (n^2+1)\sin^2\vartheta + 1}{(n^2+1)\sin^2\vartheta - 1}. \quad (34)$$

Sollte man in der eben nach Fresnel gegebenen Ableitung der Formel (34) einigen Anstofs darin finden, dafs in den beiden Gliedern B und D das $\sqrt{-1}$ fortgeblieben ist, so kann man dasselbe auch in der Rechnung lassen und auf folgende Weise verfahren. Man nehme an, dafs der Anfangspunct des Strahles A um eine Zeit x, der von $B\sqrt{-1}$ um eine Zeit y gegen einen gemeinschaftlichen Punct zurückliege, so hat man

$$\left(A\cos\frac{2\pi x}{T} - B\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi y}{T}\right)^2 + \left(A\sin\frac{2\pi x}{T} - B\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi y}{T}\right)^2 = R_s^2 = 1$$

oder

$$A^2 - B^2 - 2AB\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi(x-y)}{T} = 1;$$

und wegen $A^2 + B^2 = 1$ folgt

$$\cos\frac{2\pi(x-y)}{T} = \frac{B\sqrt{-1}}{A}. \qquad (35)$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn man setzt

$$\pm A = A\cos\frac{2\pi x}{T} - B\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi y}{T}, \qquad (36)$$

und

$$\mp B = A\sin\frac{2\pi x}{T} - B\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi y}{T}. \qquad (37)$$

Es ist nämlich aus (36)

$$\cos\frac{2\pi x}{T} = \frac{B\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi y}{T} \pm A}{A}$$

und

$$\cos^2\frac{2\pi x}{T} = \frac{-B^2\cos^2\frac{2\pi y}{T} + A^2 \pm 2AB\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi y}{T}}{A^2},$$

aus (37)

$$\sin\frac{2\pi x}{T} = \frac{B\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi y}{T} \mp B}{A},$$

$$\sin^2\frac{2\pi x}{T} = \frac{-B^2\sin^2\frac{2\pi y}{T} + B^2 \mp 2B^2\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi y}{T}}{A^2}$$

und

$$\cos^2\frac{2\pi x}{T} = \frac{A^2 - B^2\cos^2\frac{2\pi y}{T} \pm 2B^2\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi y}{T}}{A^2};$$

beide Werthe von $\cos^2\frac{2\pi x}{T}$ einander gleich gestellt geben

$$B\sin\frac{2\pi y}{T} = A\cos\frac{2\pi y}{T},$$

woraus $\sin\frac{2\pi y}{T} = \pm A$ und $\cos\frac{2\pi y}{T} = \pm B$ folgt. Durch Substitution dieser Werthe in die obigen Gleichungen findet man

$$\cos\frac{2\pi x}{T} = \frac{\pm B^2\sqrt{-1} \pm A}{A} \quad \text{und} \quad \sin\frac{2\pi x}{T} = \frac{\pm AB\sqrt{-1} \mp B}{A},$$

also $\cos\frac{2\pi(x-y)}{T} = \cos\frac{2\pi x}{T}\cos\frac{2\pi y}{T} + \sin\frac{2\pi x}{T}\sin^2\frac{2\pi y}{T} = \frac{B\sqrt{-1}}{A}$, wie oben. Es sei nun die aus beiden Theilen zusammengesetzte Schwingung durch die Gleichung

$$\xi_o = \sin\frac{2\pi\alpha}{T}$$

gegeben, so ist

$$\sin\frac{2\pi\alpha}{T} = A\sin\frac{2\pi x}{T} - B\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi y}{T} = \mp B, \qquad (38)$$

und

$$\cos\frac{2\pi\alpha}{T} = A\cos\frac{2\pi x}{T} - B\sqrt{-1}\cos\frac{2\pi y}{T} = \pm A. \qquad (39)$$

Der Strahl R_p besteht aus den beiden Theilen $-C$ und $-D\sqrt{-1}$, und verhält sich ganz wie R_s; setzt man daher $-C$ für A und $-D\sqrt{-1}$ für $-B\sqrt{-1}$, so erhält man nach der frühern Bezeichnung

$$\xi_p = \sin\frac{2\pi\beta}{T},$$

wo $\sin\frac{2\pi\beta}{T} = \pm D$ (40), und $\cos\frac{2\pi\beta}{T} = \mp C$ (41) ist.

Die Differenz der Anfangspuncte beider Strahlen oder $(\alpha-\beta)$ bestimmt

$$\cos\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{T} = -AC + BD = \frac{2n^2\sin^4\vartheta - (n^2+1)\sin^2\vartheta + 1}{(n^2+1)\sin^2\vartheta - 1}.$$

Trotz der eben gefundenen Differenz in ihren Anfangspuncten bedingen dennoch R_s und R_p oder vielmehr ξ_s und ξ_p, als von demselben polarisirten Strahle herrührend, zusammen die Schwingung der Aethertheilchen und ertheilen ihnen hiernach eine eigenthümliche Bahn. Nimmt man als Mittelpunct derselben den Stand des Aethertheilchens zur Zeit der Ruhe an, legt die Coordinatenaxe x parallel zur Schwingungsrichtung ξ_s, die Coordinatenaxe y parallel zu ξ_p, so erhält man zur Bestimmung der Bahnlinie

$$x : y = \sin\frac{2\pi t}{T} : \sin\frac{2\pi[t+(\alpha-\beta)]}{T}, \quad (42)$$

eine Gleichung, welche eine geradlinige Bahn bezeichnet, wenn $\alpha-\beta = 0 = \pi = 2\pi = \ldots$, eine kreisrunde, wenn $\sin\frac{2\pi[t+(\alpha-\beta)]}{T} = \cos\frac{2\pi t}{T}$ oder $\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{T} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \ldots$, ist, endlich eine elliptische für alle übrigen Werthe von $(\alpha-\beta)$. In dem letztern Falle sind die beiden halben Axen der beschriebenen Ellipse $= \sqrt{\left(1+\cos\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{T}\right)}$ und $\sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{T}\right)}$.

Die Richtigkeit der Formel (34) hat Fresnel durch einige Versuche erwiesen, bei welchen er einen unter 45° polarisirten Lichtstrahl im Innern eines Glasprismas 2, 3 und 4 mal unter demselben Winkel reflectiren liefs, bis $\frac{2\pi.2(\alpha-\beta)}{T}$, $\frac{2\pi.3(\alpha-\beta)}{T}$, $\frac{2\pi.4(\alpha-\beta)}{T} = 90°$ oder das reflectirte Licht circular polarisirt wurde.

§. VI.

Ueber einige Interferenzphänomene durch Reflexion.

Läfst man Licht auf eine gleichmäfsig fein geritzte, übrigens polirte Fläche fallen, so werfen nur die glatten, nicht die geritzten Streifen das Licht zurück; es findet also derselbe Fall statt, als wenn das Licht in der Richtung der Zurückwerfung durch eine den polirten Streifen gleiche Anzahl entsprechender Oeffnungen hindurchdränge und es müssen ähnliche Interferenzphänomene auftreten, als §. III. bei Gittern gefunden wurden. Diese Erscheinungen bieten demnach für die Berechnung nichts Neues dar.

Ein besonderer Fall kommt dagegen vor, wenn man sich zur Reflexion des Lichtes zweier sehr wenig gegen einander geneigter Spiegel bedient. Es sei nämlich A (Fig. 22.) ein leuchtender Punct

einfarbigen oder weifsen Lichtes, MO und NO die Durchschnitte zweier um den Winkel $MON = 180^0 - \nu$ gegen einander geneigter Spiegel, wo ν ein sehr kleiner Winkel ist, so wird das von A ausgehende Licht bekanntlich von MO so reflectirt, als wenn es von D, und von NO, als wenn es von E ausginge, indem D und E in den so weit verlängerten Perpendikeln von A auf MO und NO liegen, dafs $BD = AB$ und $AF = FE$ ist. Setzt man $AB = a$ und $BO = b$, so findet man $OD = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, ferner $AF = a\cos\nu + b\sin\nu$, $FO = b\cos\nu - a\sin\nu$ und $OE = \sqrt{(a^2+b^2)}$; die beiden leuchtenden Puncte D und E liegen daher gleich weit von O entfernt. Die von ihnen ausgehenden Lichtwellen werden sich vor den Spiegeln mannigfach durchkreuzen, und dadurch an den verschiedenen Stellen verschiedene Intensitäten erzeugen, welche sich als lichte und dunkle Streifen darstellen. Um ihre Vertheilung zunächst in der Fläche der Zeichnung zu bestimmen, nehme man G in der Mitte von DE, ziehe GO und verlängere diese Linie bis zu dem beliebigen Puncte P; ferner ziehe man senkrecht auf GP in P, also parallel zu DE, die Linie HI, in welcher die Intensität in L bestimmt werden soll. Nennt man $PL = n$, $DG = m$, $GP = p$ und bezeichnet die gleiche Intensität der beiden Puncte D und E mit A^2, so findet man den Weg von D bis $L = p + \frac{1}{2}\frac{(m+n)^2}{p}$, den Weg $EL = p + \frac{1}{2}\frac{(m-n)^2}{p}$, also nach §. II. die Intensität im Puncte $L =$

$$I = A^2\left(\cos\frac{\pi(m+n)^2}{p\lambda} + \cos\frac{\pi(m-n)^2}{p\lambda}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi(m+n)^2}{p\lambda} + \sin\frac{\pi(m-n)^2}{p\lambda}\right)^2$$

$$= 4A^2\cos^2\frac{2\pi mn}{p\lambda}. \quad (1)$$

Nach dieser Formel ist die Intensität ein Maximum oder $= 4A^2$,

$$\text{wenn} \quad \cos\frac{2\pi mn}{p\lambda} = 1 \text{ ist,}$$

$$\text{d. h. bei } n = 0 = \pm\frac{p\lambda}{2m} = \pm\frac{2p\lambda}{2m} = \pm\frac{3p\lambda}{2m} = \ldots.$$

zweitens ein Minimum oder $= 0$,

$$\text{wenn} \quad \cos\frac{2\pi mn}{p\lambda} = 0 \text{ ist,}$$

$$\text{d. h. bei } n = \pm\frac{p\lambda}{4m} = \pm\frac{3p\lambda}{4m} = \pm\frac{5p\lambda}{4m} = \ldots.$$

Für alle Oerter aufserhalb der gezeichneten Ebene errichtet man auf derselben ein Perpendikel in P, und zieht durch beliebige Puncte desselben Linien parallel mit HI. Bei dieser Construction bleibt alles wie vorhin, nur geht p in die Linie über, welche von G nach den gewählten Puncten des Perpendikels gezogen wird. — Wenn A in unendlicher Entfernung vom Spiegel liegt, oder, was dasselbe ist, wenn die Strahlen unter einander parallel auf die Spiegel fallen, so verwandelt sich m in $p\sin\frac{\nu}{2}$, und die Maxima sind

$$\text{bei } n = 0 = \pm\frac{\lambda}{2\sin\frac{\nu}{2}} = \pm\frac{2\lambda}{2\sin\frac{\nu}{2}} = \pm\frac{3\lambda}{2\sin\frac{\nu}{2}} = \ldots,$$

$$\text{die Minima bei } n = \pm\frac{\lambda}{4\sin\frac{\nu}{2}} = \pm\frac{3\lambda}{4\sin\frac{\nu}{2}} = \pm\frac{5\lambda}{4\sin\frac{\nu}{2}} = \ldots.$$

In diesem Falle hat die Entfernung des Punctes P von O keinen Einflufs auf die Erscheinung; die Richtungslinie OP wird aber dadurch gefunden, dafs sie mit der gegen beide Spiegel gleich geneigten Linie OR denselben Winkel bilden mufs, welchen mit ihr die einfallenden Strahlen einschliefsen.

§. VII.
Reflexion von Metallflächen.

Nach dem jetzigen Stande der Undulationstheorie ist hier die passendste Stelle, Brewsters Beobachtungen über die Reflexion von Metallflächen anzuführen. Derselbe fand, dafs von Metallflächen reflectirtes gewöhnliches Licht zwar unter keinem Einfallswinkel vollständig polarisirt wurde, dafs aber die Schwingungsweite des in der Einfallsebene polarisirten Strahles unter einem bestimmten Winkel ihr Maximum erreichte, während die Schwingungsweite des senkrecht dazu polarisirten im Minimum war, oder mit andern Worten, dafs das unter einem bestimmten Winkel reflectirte Licht am meisten in senkrecht zur Reflexionsebene polarisirtes überging. Wohl mit Recht setzte er nach §. V. (20) den Brechungsexponenten der Metalle gleich der Tangente dieses Winkels. Dadurch fand er unter andern für Stahl $n = 3{,}372$, für Silber $n = 3{,}271$. Noch merkwürdigere Resultate ergaben sich, als er unter einem Azimuth von 45° polarisirtes Licht reflectiren liefs; es zeigte sich nach der Reflection unter dem obigen Winkel circular, nach der Reflexion unter einem andern Winkel elliptisch polarisirt. Hiernach bleibt also nicht blofs bei der totalen Reflexion im Innern eines Glasprismas der zur Reflexionsebene parallel schwingende Strahl gegen den senkrecht schwingenden zurück, sondern auch bei den Metallen findet dasselbe statt; nur liegt darin ein Unterschied, dafs in jenem Falle beide Strahlen eine gleiche Schwingungsweite bewahren, hier der parallel schwingende schwächer wird, weshalb nach Wiederherstellung des geradlinig polarisirten Strahls durch mehrmalige Reflexion seine Polarisationsebene in ein kleineres Azimuth kommt. Nach zweimaliger Reflexion unter dem Winkel des Polarisationsmaximums war das Azimuth φ immer negativ, aber abnehmend in folgender Ordnung:

	φ			φ			φ	
Glas, totale Reflexion,	45°	0′	Weifsblech	31°	0′	Stahl	17°	0′
Reines Silber	39	48	Kupfer	29	0	Schwefelkies . . .	14	0
Gewöhnliches Silber .	36	0	Quecksilber	26	0	Antimon	13	5
Feines Gold	35	0	Platin	22	0	Speiskobalt	13	0
Jouwel. Gold	33	0	Wismuth	21	0	Glanzkobalt	12	30
Kornzinn	33	0	Spiegelmetall . . .	21	0	Blei	11	0
Messing	32	0	Zink	19	10	Bleiglanz	2	0
						Eisenglanz	0	0

Nach diesen Messungen untersuchte Brewster vornehmlich an Stahl, denn die Beobachtungen an Silber sind nicht in hinreichender Vollständigkeit, die Verzögerung des einen Strahls gegen den andern für verschiedene Einfallswinkel dadurch zu bestimmen, dafs er denselben Strahl 2, 3 . . . . u. s. w. mal reflectiren liefs, bis er wieder die geradlinige Polarisation erreicht hatte. Die Resultate giebt die folgende Tabelle, in der m die Anzahl der Reflexionen und ϑ den Einfallswinkel bedeutet.

m	ϑ		
6	86° 0′	oder	52° 20′
5	84 0	-	56 25
4	82 20	-	60 20
3	79 30	-	67 40
2	75 0	-	75 0

Das Azimuth φ des auf diese Weise mehrmal reflectirten Strahles war bei

ϑ	φ
75° 0′	17° 0′
79 30	13 15
82 20	11 30
84 0	10 30
86 0	9 30

Neumann hat zur Berechnung dieser Beobachtungen aus §. V. (34) die Formel

$$\cos\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{\lambda}=\frac{2n^2\sin^4\vartheta-(n^2+1)\sin^2\vartheta+1}{(n^2+1)\sin^2\vartheta-1}$$

herübergenommen. Setzt man darin den als Winkel gegebenen Verzögerungsraum des einen Strahls gegen den andern oder $\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{\lambda}=\delta$ und $n\sin\vartheta=\sin\vartheta'$, so ist

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\delta=\sqrt{\left[\frac{1+\cos\delta}{1-\cos\delta}\right]}=\sqrt{[-\operatorname{tang}^2\vartheta\operatorname{tang}^2\vartheta']}.$$

In dieser Formel, die bei der Totalreflexion wegen des — unter dem Wurzelzeichen nur scheinbar auf einen unmöglichen Werth führt, weil auch $\operatorname{tang}\vartheta'$ unmöglich ist, ändert Neumann $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\delta$ in $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta$, läſst das negative Zeichen fort, und kommt auf

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta=\operatorname{tang}\vartheta\operatorname{tang}\vartheta'.$$

Allein ohne groſse Mühe erkennt man, daſs die Ableitung dieser Formel an die obige wohlbegründete Fresnelsche Gleichung bloſs anknüpft, um sich als eine den Grundsätzen der Theorie gemäſse darzustellen, daſs ihr aber dessen ungeachtet nur der Werth einer rein empirischen, auf Induction gegründeten, zugesprochen werden kann. Denn auſserdem, daſs die Verwandlung der Cotangente in die Tangente und das Fortstreichen des $\sqrt{-1}$ willkürlich ist, wird auch der Brechungsexponent n in beiden auf umgekehrte Weise angewandt; in der Fresnelschen Gleichung bedeutet n den Brechungsexponenten von Glas in Luft, in der daraus abgeleiteten den Brechungsexponenten von Luft in Metall, das doch die Stelle des Glases vertritt. Endlich setzt die Fresnelsche Formel die Gleichheit der Schwingungsweiten der senkrecht und parallel zur Reflexionsebene polarisirten Strahlen voraus, bei den Metallen aber findet dies nicht statt. Kurz mit der Formel von Neumann ist für die Undulationstheorie nichts gewonnen. Darf man übrigens die Reflexion von Metallen mit der Reflexion von durchsichtigen Medien zusammenstellen, und sind die oben gegebenen Brechungsexponenten die richtigen, so müssen auch hier die Formeln §. V. (10) und (15) in Anwendung kommen; da sie aber den Beobachtungen widersprechen, so würde man für jetzt die Hypothese hinzuzufügen haben, daſs auch von den gebrochenen Strahlen einige in einem mit dem Einfallswinkel veränderlichen Abstande von der Reflexionsebene aus den Metallen zurückkehrten, und mit jenen ursprünglich reflectirten Strah-

len zu gemeinsamen Wellensystemen zusammenstiefsen. Wie ich mich überzeugt habe, lassen sich durch eine solche Hypothese ganz brauchbare Formeln gewinnen, die selbst das veränderte Azimuth der Polarisationsebene nach mehrmaliger Reflexion geben, wozu Neumann wieder eine neue Formel einführen mufste. Allein die Untersuchung über die Bewegung des Lichtes in undurchsichtigen Medien liegt jetzt noch ganz aufser dem Gebiete der Theorie und Beobachtungen in erforderlicher Ausdehnung fehlen, daher will ich die Sache in dieser Schrift nicht weiter verfolgen, welche nur sichere Resultate, keine Hypothesen enthalten soll. — Die weiteren Messungen Brewsters bezogen sich auf die Wiederherstellung der geradlinigen Polarisation, wenn die beiden Metallplatten nicht nach derselben Ebene reflectirten. Er liefs nämlich zuerst in einem Azimuth von 45° polarisirtes Licht von einer Metallplatte reflectirt werden, stellte die zweite so, dafs die auf ihr Lothrechte in der Einfallsebene lag, und bestimmte jetzt den Winkel, unter welchem sie das Licht wieder geradlinig polarisirte, oder den Wiederherstellungswinkel; drehte er hiernach die zweite Platte um den einfallenden Strahl, so war mit verändertem Azimuth auch der Wiederherstellungswinkel ein anderer. Leider hat Brewster auf diese Beobachtungen einen bedeutendern Werth gelegt, als auf die frühern, und doch lassen sie sich ohne Mühe berechnen, wenn man nur den Hergang bei einmaliger Recflexion als bekannt voraussetzt. Denn es falle im Azimuth von 45° polarisirtes Licht unter dem Winkel ϑ auf eine Metallplatte, und es sei bekannt, dafs der zur Reflexionsebene senkrecht schwingende Strahl mit einer Schwingungsweite $= A$ und um α verzögert reflectirt werde, der parallel schwingende dagegen mit einer Schwingungsweite $= B$ und um β verzögert, so treffen bei einer Drehung x der zweiten Metallplatte aus der ersten Einfallsebene auf diese Platte die Strahlen $A \cos x$ und $B \sin x$ mit ihren Verzögerungsräumen α und β als senkrecht schwingende, die Strahlen $-A \sin x$ und $B \cos x$ mit ihren Verzögerungsräumen α und β als parallel schwingende. Setzt man daher bei einer neuen Reflexion unter dem Winkel ϑ' die Schwingungsweite der ersten Art Strahlen $= A'$, der letztern $= B'$, und ihre neuen Verzögerungen $= \alpha'$ und β', so folgt aus §. II. (5) für den Verzögerungsraum D der von der zweiten Platte reflectirten, senkrecht gegen sie polarisirten Strahlen:

$$\tang \frac{2\pi D}{\lambda} = \frac{AA' \cos x \sin \frac{2\pi(\alpha+\alpha')}{\lambda} + BA' \sin x \sin \frac{2\pi(\beta+\alpha')}{\lambda}}{AA' \cos x \cos \frac{2\pi(\alpha+\alpha')}{\lambda} + BA' \sin x \cos \frac{2\pi(\beta+\alpha')}{\lambda}},$$

und für den Verzögerungsraum $\varDelta$ der parallel polarisirten:

$$\tang \frac{2\pi \varDelta}{\lambda} = \frac{-AB' \sin x \sin \frac{2\pi(\alpha+\beta')}{\lambda} + BB' \cos x \sin \frac{2\pi(\beta+\beta')}{\lambda}}{-AB' \sin x \cos \frac{2\pi(\alpha+\beta')}{\lambda} + BB' \cos x \cos \frac{2\pi(\beta+\beta')}{\lambda}}.$$

Wenn nun das reflectirte Licht geradlinig polarisirt sein soll, entsteht die Bedingungsgleichung

$$\tang \frac{2\pi D}{\lambda} = \tang \frac{2\pi \varDelta}{\lambda}$$

oder

$$\frac{A \cos x \sin \frac{2\pi(\alpha+\alpha')}{\lambda} + B \sin x \sin \frac{2\pi(\beta+\alpha')}{\lambda}}{A \cos x \cos \frac{2\pi(\alpha+\alpha')}{\lambda} + B \sin x \cos \frac{2\pi(\beta+\alpha')}{\lambda}} = \frac{-A \sin x \sin \frac{2\pi(\alpha+\beta')}{\lambda} + B \cos x \sin \frac{2\pi(\beta+\beta')}{\lambda}}{-A \sin x \cos \frac{2\pi(\alpha+\beta')}{\lambda} + B \cos x \cos \frac{2\pi(\beta+\beta')}{\lambda}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{2\pi(\alpha-\beta)}{\lambda}=\delta$ und $\frac{2\pi(\alpha'-\beta')}{\lambda}=\delta'$, so findet man

$$\tang \delta' = -\frac{2AB\sin\delta}{(A^2-B^2)\sin 2x + 2AB\cos 2x\cos\delta}$$

und man kann aus δ' nach den frühern Beobachtungen den Winkel ϑ' oder den Wiederherstellungswinkel herleiten.

§. VIII.

Ueber die Farben dünner Blättchen.

1. Wenn Licht auf zwei nahe hinter einander liegende Flächen fällt, so giebt sowohl das von beiden reflectirte, als das durchgehende Licht zu schönen Interferenzphänomenen Veranlassung, welche hier näher erläutert werden sollen. Es sei zuerst $ABCD$ (Fig. 23.) ein dünnes Blättchen von der Dicke D, z. B. die Hülle einer Seifenblase, und es falle darauf Licht in parallelen Strahlen GF, HI, denn der Kürze wegen mag hier überall diese Voraussetzung bleiben, so ist die Wellenebene der einfallenden Strahlen EF; diese wird von AB theils reflectirt, theils gebrochen; die gebrochene Welle erleidet an der zweiten Fläche CD eine neue Reflexion, geht wieder durch AB hindurch, und folgt der von der ersten Fläche reflectirten Welle in einem bestimmten Abstand. Setzt man, um ihn zu finden, den einfallenden Winkel oder $FEB=\vartheta$, den gebrochenen $=\vartheta'$, so findet man den Weg der von AB reflectirten Welle von EF bis zur beliebigen Wellenebene $MN=EM$, den Weg der nach der Brechung reflectirten ebenfalls bis MN auf gleiche Zeit gebracht $=OP+(EK+KO)\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}$ $=EM-OL+2EK\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=EM-2D\tang\vartheta'\sin\vartheta+2D\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta'\sin\vartheta'}=EM+2Dn\cos\vartheta'$, wenn $n=\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}$ den Brechungsexponenten bedeutet. War nun die einfallende Welle nach EF polarisirt und besafs sie eine Intensität $=A^2$, so ist die Schwingungsweite des ersten Wellensystems nach §. V. (10) $=-A\frac{\sin(\vartheta-\vartheta')}{\sin(\vartheta+\vartheta')}$, des andern nach §. V. (10) und (12) $=A\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}\cdot\frac{\sin(\vartheta-\vartheta')}{\sin(\vartheta+\vartheta')}$, und beide zusammen besitzen nach §. II. (4) eine Intensität $=$

$$I=A^2\frac{\sin^2(\vartheta-\vartheta')}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}\left[\left\{-1+\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}^2+\left\{\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}^2\right],$$

oder $\frac{\sin^2(\vartheta-\vartheta')}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}=a^2$ und $\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}=b$ gesetzt,

$$I=A^2a^2\left\{1+b^2-2b\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}. \quad (1)$$

Nach dieser Formel erhält man ein Maximum der Intensität,

$$\text{wenn } \cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}=-1,$$

und ein Minimum

$$\text{wenn } \cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}=1 \text{ ist.}$$

Dies giebt die Maxima

$$\text{bei}\quad D = \frac{\lambda}{4n\cos\vartheta'} = \frac{3\lambda}{4n\cos\vartheta'} = \frac{5\lambda}{4n\cos\vartheta'} = \ldots.,\qquad (2)$$

die Minima

$$\text{bei}\quad D = 0 = \frac{\lambda}{2n\cos\vartheta'} = \frac{2\lambda}{2n\cos\vartheta'} = \frac{3\lambda}{2n\cos\vartheta'} = \ldots.\qquad (3)$$

War die einfallende Welle dagegen senkrecht gegen EF polarisirt, so ist die Schwingungsweite der von AB reflectirten Welle nach §. V. (15) $= A\frac{\text{tang}(\vartheta-\vartheta')}{\text{tang}(\vartheta+\vartheta')}$, die Schwingungsweite der zweiten Welle nach §. V. (15) und (17) $= -A\frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos^2(\vartheta-\vartheta')} \times \frac{\text{tang}(\vartheta-\vartheta')}{\text{tang}(\vartheta+\vartheta')}$, also die gemeinsame Intensität $=$

$$I_1 = A^2\frac{\text{tang}^2(\vartheta-\vartheta')}{\text{tang}^2(\vartheta+\vartheta')}\left[\left\{1-\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos^2(\vartheta-\vartheta')}\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}^2 + \left\{-\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos^2(\vartheta-\vartheta')}\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}^2\right],$$

oder, wenn man $\frac{\text{tang}^2(\vartheta-\vartheta')}{\text{tang}^2(\vartheta+\vartheta')} = a_1^2$ und $\frac{\sin 2\vartheta\sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')\cos^2(\vartheta-\vartheta')} = b_1$ setzt,

$$I_1 = A^2 a_1^2\left\{1+b_1^2-2b_1\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}.\qquad (4)$$

Auch diese Gleichung giebt die Maxima und Minima bei denselben Werthen von D wie (2) und (3), nur ist die Intensität derselben verschieden. Die Untersuchungen über gewöhnliches und in einem beliebigen Azimuth polarisirtes Licht liegen in beiden Formeln (1) und (4) zusammen.

Allein streng genommen, besteht das reflectirte Licht nicht blofs aus zwei, sondern aus vielen Wellensystemen, da von dem zweiten ein Theil wieder von AB und darauf von CD reflectirt wird; dieser Theil geht darauf theils durch AB hindurch, theils giebt er durch neue Reflexionen immer neue Wellensysteme, die sich in gegenseitigen Abständen von $2Dn\cos\vartheta'$ folgen. Ist das Licht nach EF polarisirt, so beträgt die Schwingungsweite der dritten Welle $Aab\frac{\sin^2(\vartheta-\vartheta')}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} = Aa^3b$, die Schwingungsweite der vierten Aa^5b u. s. w.; folglich kommt die gemeinsame Intensität auf

$$I = A^2a^2\left\{-1+b\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+a^2b\cos\frac{2\pi.4Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+a^4b\cos\frac{2\pi.6Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+\ldots.\right\}^2 + A^2a^2\left\{b\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+a^2b\sin\frac{2\pi.4Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+a^4b\sin\frac{2\pi.6Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+\ldots.\right\}^2.\quad (5)$$

Das Differenzial nach D gleich Null gesetzt, liefert

$$0 = \left\{1-b\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}-a^2b\cos\frac{2\pi.4Dn\cos\vartheta'}{\lambda}-\ldots\right\}\left\{b\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+2a^2b\sin\frac{2\pi.4Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+\ldots\right\} + \left\{b\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+a^2b\sin\frac{2\pi.4Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+\ldots\right\}\left\{b\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+2a^2b\cos\frac{2\pi.4Dn\cos\vartheta'}{\lambda}+\ldots\right\}.$$

Diese Gleichung ist durch $\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}$ theilbar, daher liegen die Maxima und Minima der Intensität in der Formel

$$\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda} = 0,\qquad (6)$$

welche, wie oben, die Maxima durch $\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda} = -1$

und die Minima durch $\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda} = 1$ bestimmt.

Ist das auffallende Licht senkrecht gegen EF polarisirt, so ändern sich nur die Constanten, nämlich a in a_1, b in b_1, alles übrige bleibt unverändert.

Ebenso wie das reflectirte Licht Interferenzen bildet, ebenso findet man es auch bei dem durch das dünne Blättchen hindurchgegangen. Die einfallende Welle nämlich $GEHR$ (Fig. 24.) wird nach IK gebrochen; ihr einer Theil dringt nach MN durch die Fläche CD hindurch, der andere wird nach LS reflectirt, dort von AB wieder reflectirt, und gelangt bei OP wenigstens zum Theil durch CD hindurch. Wenn auch hier das einfallende Licht zuerst wieder nach EF polarisirt ist, so ist die Schwingungsweite der ersten Welle $= A\frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} = Ab$, nach der vorigen Bezeichnung, die Schwingungsweite der zweiten Welle $= A\frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')}\cdot\frac{\sin^2(\vartheta-\vartheta')}{\sin^2(\vartheta+\vartheta')} = Aba^2$; ferner findet man den Weg der ersten Welle von EF bis $MN = nEI + IM$, den Weg der zweiten gleichfalls von EF bis $MN = 3nEI + OQ = 3nEI + IM - IT = nEI + IM + \frac{2nD}{\cos\vartheta'} - 2D \operatorname{tang}\vartheta' \sin\vartheta$ $= nEI + IM + 2Dn\cos\vartheta'$; folglich ist die Intensität beider Wellen zusammen =

$$I = A^2b^2\left\{1 + a^2\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}^2 + A^2b^2\left\{a^2\sin\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}^2$$

$$= A^2b^2\left\{1 + a^4 + 2a^2\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}. \quad (7)$$

Die Maxima sind hiernach bei $\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda} = 1$ (8)

und die Minima bei $\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda} = -1$, (9)

grade umgekehrt wie beim reflectirten Lichte. Wäre das einfallende Licht senkrecht gegen EF polarisirt, so fände man

$$I_1 = A^2b_1^2\left\{1 + a_1^4 + 2a_1^2\cos\frac{2\pi.2Dn\cos\vartheta'}{\lambda}\right\}, \quad (10)$$

und die Maxima und Minima bleiben dieselben. Auch die Berücksichtigung der übrigen Wellen bringt keine weitere Aenderung in den Formeln der Maxima und Minima hervor, daher mögen sie hier bei Seite bleiben. —

Scheinbar können nach (2), (3) und (8), (9) bei jedem D, also bei jeder Dicke des Blättchens in den reflectirten und durchgelassenen Strahlen vollkommne Minima entstehen, was bei Anwendung von weifsem Lichte farbige Erscheinungen geben würde. Allein setzt man den besten Fall, dafs einfarbiges Licht einfällt, dessen Wellenlänge λ z. B. dem Fraunhoferschen Strahl B entspricht, wo $\lambda = 0{,}00002541$ par. Zoll ist, so würde zwar bei einer sicher noch keineswegs bedeutenden Dicke des Blättchens von $\frac{41}{4}\lambda$, wenn man zur Abkürzung $n\cos\vartheta = 1$ nimmt, nach (2) die Intensität des reflectirten Lichtes ihr Maximum erreichen, allein sie würde auch für einen andern Strahl

von der Wellenlänge λ' nach (3) ihr Minimum bei $\frac{21\lambda'}{2}$ haben; aus $\frac{41}{4}\lambda = \frac{21}{2}\lambda'$ folgt die Wellenlänge $\lambda' = \frac{41}{42}\lambda = 0{,}00002480$ par. Zoll. Soll also mit dem Maximum des Strahles λ nicht zugleich ein Minimum des Strahles λ' verbunden sein, so mufs man in soweit für die Einfarbigkeit des einfallenden Lichtes gesorgt haben, dafs nicht zugleich mit den Strahlen von der Wellenlänge λ auch andere von der Wellenlänge λ' verbunden sind. Der Fraunhofersche Strahl C besitzt nun eine Wellenlänge von 0,00002425 par. Zoll, demnach liegt λ' noch näher an B, und doch liegen beide B und C noch im rothen Lichte. Alle unsere einfarbigen Strahlen, auch die reinsten, umschliefsen sicher Strahlen von weit mehr aus einander liegenden Wellenlängen als λ und λ'; daher ist schon bei einer Dicke des Blättchens von ungefähr 10λ von Maximis und Minimis des reflectirten und durchgelassenen Lichtes wenigstens in soweit keine Rede mehr, als man darunter den Unterschied von Hell und Dunkel versteht, sondern einige Strahlen sind im Maximum, andere im Minimum ihrer Intensität, und geben zusammen den Eindruck eines etwas geschwächten, aber immer gleich bestehenden Lichtes. Der wahre Bestand der Sache und mit ihm die Richtigkeit der Formeln mufs sich darbieten, wenn man das reflectirte oder durchgelassene Licht durch ein Prisma zerstreut; dann werden die Maxima und Minima der verschiedenen im auffallenden Lichte enthaltenen Strahlen aus einander liegen und eine Folge von hellen und dunklen Streifen zeigen. Wendet man weifses Licht an, so wird das durch das Prisma entstehende Spectrum der Quere nach je nach dem Werthe von D von breitern oder schmälern hellen und dunklen Banden durchzogen sein, und ganz das Ansehen gewinnen, wie es Brewster beim Durchgange des Lichtes durch salpetriges Gas beobachtet hat. Wenn daher derselbe in dieser Thatsache einen unwiderlegbaren Einwurf gegen die Undulationstheorie des Lichtes gefunden zu haben glaubt, so können wir ihm um so weniger beistimmen, als wir hier, wenn auch nicht eine schon erwiesene Erklärung seiner Beobachtung, doch eine ihr vollkommen entsprechende Erscheinung nachgewiesen und nach den Gesetzen der Undulationstheorie erklärt haben.

2. Als zweiten Fall der hierher gehörigen Phaenomene nehmen wir den mit dem vorstehenden eng zusammenhängenden Fall, wo sich zwischen zwei parallelen Platten ein enger entweder mit Luft oder mit einer Flüssigkeit ausgefüllter Raum befindet. Die beiden Platten seien $ABCD$ und $EFGH$ (Fig. 25.); die Lichtwelle KN der Strahlen IK, LM fällt unter dem Winkel ϑ ein, wird unter dem Winkel ϑ' nach OP gebrochen, und dort von CD theils nach QR reflectirt, von wo sie als gebrochene Welle nach ST gelangt, theils nach UV hindurchgelassen und dort von EF reflectirt, so dafs sie nach WX, nach YZ und endlich nach $S'T'$ in der Richtung von ST gelangt. Aufser diesen beiden gröfsten Wellensystemen entstehen noch unendlich viele andere durch wiederholte Reflexion, die aber, wie die Uebereinstimmung des Folgenden mit der vorigen Untersuchung lehrt, auf die Bestimmung der Maxima und Minima keinen Einflufs ausüben. Um die Wege der Wellen zu bestimmen, setze man den Brechungsexponenten von Luft in die Platten $= n = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}$, und den Brechungsexponenten von Luft in die zwischen $CDEF$ befindliche Substanz $= m = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta''}$, dann ist der Weg der ersten Welle von KN bis $ST = 2nOK + QS$, der Weg der zweiten $= 2nOK + 2mOU + YS'$ $= 2nOK + \frac{2mD}{\cos\vartheta''} + QS - 2D\,\mathrm{tang}\,\vartheta''\sin\vartheta = 2nOK + QS + 2Dm\cos\vartheta''$. Die Schwingungsweite

der ersten Welle folgt aus der Intensität der nach KN polarisirten einfallenden $= A^2$ nach §. V.
$= A \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')} \cdot \frac{\sin(\vartheta'' - \vartheta')}{\sin(\vartheta'' + \vartheta')}$, der zweiten $= -A \frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')} \cdot \frac{\sin(\vartheta'' - \vartheta')}{\sin(\vartheta'' + \vartheta')} \cdot \frac{\sin 2\vartheta'' \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta'' + \vartheta')}$;
setzt man daher zur Abkürzung $\frac{\sin 2\vartheta \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')} \cdot \frac{\sin(\vartheta'' + \vartheta')}{\sin(\vartheta'' - \vartheta')} = c$ und $\frac{\sin 2\vartheta'' \sin 2\vartheta'}{\sin^2(\vartheta'' + \vartheta')} = d$, so erhält man die Intensität des reflectirten Lichtes aus

$$I = A^2 c^2 \left\{1 - d \cos \frac{2\pi . 2Dm \cos \vartheta''}{\lambda}\right\}^2 + A^2 c^2 \left\{-d \sin \frac{2\pi . 2Dm \cos \vartheta''}{\lambda}\right\}^2$$

$$= A^2 c^2 \left\{1 + d^2 - 2d \cos \frac{2\pi . 2Dm \cos \vartheta''}{\lambda}\right\}. \quad (11)$$

Die Maxima bedingt nach dieser Formel

$$\cos \frac{2\pi . 2Dm \cos \vartheta''}{\lambda} = -1, \quad (12)$$

die Minima

$$\cos \frac{2\pi . 2Dm \cos \vartheta''}{\lambda} = 1. \quad (13)$$

Beide Gleichungen stimmen, wie es zu erwarten war, ganz mit den Gleichungen (2) und (3) überein, indem $m \cos \vartheta''$ die Stelle von $n \cos \vartheta'$ vertritt. Unter diesen Umständen wird es nicht nöthig sein, diesen Fall noch ausführlicher zu behandeln, sondern es kann genügen, auf das Frühere zurückzuweisen.

3. Den dritten und wichtigsten Fall bilden die Neutonschen Ringe. Wir wollen die Entstehung derselben zuerst bei senkrechtem Einfall des Lichtes erklären, und daran den allgemeinen Fall anschliefsen, wenn der Einfallswinkel ein beliebiger ist. Es sei ABD (Fig. 26.) der Durchschnitt von der sphärischen Oberfläche eines Linsenglases, deren Radius $CB = r$ eine beträchtliche Länge habe; $EFGH$ stelle ein planes Glas vor, das bei B die sphärische Oberfläche berührt; der Zwischenraum zwischen beiden Gläsern enthalte Luft. Die senkrecht einfallende Welle $LIMK$ dringt bei IK durch das plane Glas hindurch, gelangt nach NP und erleidet hier theils eine Reflexion, theils geht sie durch EF und wird zum Theil von der Kugelfläche ABD reflectirt. Die erste und diese zweite reflectirte Welle bilden Interferenzen, die hier bestimmt werden sollen. Schon in den vorigen Fällen hat man gesehen, dafs die Schwingungsweiten der beiden in Betracht gezogenen Wellen auf die Resultate wenigstens in soweit keinen Einflufs haben, dafs sie in der Lage der Maxima und Minima eine Aenderung hervorbrächten; deshalb wird es gerathen sein, hier für dieselben lieber allgemein Ausdrücke einzuführen, als in weitläuftige und am Ende doch unerspriefsliche Rechnungen einzugehen. Man setze also die Schwingungsweite der ersten reflectirten Welle bei $NO = a$, und der zweiten an derselben Stelle $= b$, nämlich immer an dem Orte, der grade in Untersuchung kommt. Hiernach ist nur noch der Weg zu bestimmen, den die zweite Welle bis NO zurückzulegen hat. Aus der Katoptrik weifs man, dafs die parallel zu BC nahe um B auffallenden Strahlen von ABD so reflectirt werden, als wenn sie sämmtlich aus O, dem Mittelpuncte von BC, herkämen. Man verzeichne also um O mit dem Radius OB eine Kugel, deren Durchschnitt QBR sei, dann stellt QBR für die gezeichnete Fläche die reflectirte Welle wenigstens nahe um B dar, und zwar in dem Zustande, dafs sie im Stadium ihrer Schwingung um 180° gegen die unmittelbar von EF reflectirte Welle zurück-

steht; denn nach §. V. (10) und (15) haben die beide grade von B reflectirten Strahlen ungleiche Zeichen, was einen Unterschied in ihrer Schwingung von einer halben Undulation voraussetzt. Der beliebige Strahl nun, welcher nach T geht, wo $BT = x$ ist, steht gegen den unmittelbar von EF reflectirten um einen Weg $= ST + \frac{1}{2}\lambda = \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + x^2\right)} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2}\lambda = \frac{x^2}{r} + \frac{1}{2}\lambda$ zurück, und demnach erhält man für die gemeinsame Intensität der beiden Strahlen in T die Gleichung:

$$I = \left\{a - b\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda}\right\}^2 + \left\{-b\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda}\right\}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda}. \quad (14)$$

Diese Gleichung giebt die Maxima der Intensität

$$\text{bei } \cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} = -1, \quad (15)$$

$$\text{die Minima bei } \cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} = 1, \quad (16)$$

$$\text{oder die Maxima bei } x = \sqrt{\frac{\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{3\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{5\lambda r}{2}} = \ldots., \quad (17)$$

$$\text{die Minima bei } x = 0 = \sqrt{\frac{2\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{4\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{6\lambda r}{2}} = \ldots. \quad (18)$$

Doch streng genommen folgen sich auch hier mehere reflectirte Wellen hinter einander, wir wollen daher sehen, ob dieselben, deren Schwingungsweiten c, d .... seien, die gewonnenen Resultate abändern. Die von O ausgehende Welle wird zum Theil von EF reflectirt, und fällt wieder so auf ABD, als ob sie aus O' käme, wenn man $BO' = BO$ setzt. Da aber die nahe um B auffallenden Strahlen sich in einem Puncte O'' sammeln, welchen die Gesetze der Katoptrik durch $\frac{1}{BO''} = \frac{1}{BO'} + \frac{2}{r}$ bestimmen, so ist bei $BO' = \frac{r}{2}$, $\frac{1}{BO''} = \frac{4}{r}$ und $BO'' = \frac{r}{4}$; dieses O'' ist der Ausgangspunct der dritten Welle; die vierte entsteht auf ähnliche Weise aus einem Puncte, der um $\frac{r}{6}$ von B abliegt, die fünfte aus $\frac{r}{8}$ u. s. w., doch zu allen kommt gegen die erste noch eine halbe Undulation hinzu. Nach dem Gesagten erhält man die vollständige Gleichung der Intensität in T:

$$I = \left[a - b\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} - c\cos\frac{2\pi.2x^2}{r\lambda} - d\cos\frac{2\pi.3x^2}{r\lambda} - \ldots.\right]^2$$
$$+ \left[-b\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda} - d\sin\frac{2\pi.2x^2}{r\lambda} - d\sin\frac{2\pi.3x^2}{r\lambda} - \ldots.\right]^2. \quad (19)$$

$\frac{d\vartheta}{dx}$ gleich Null gesetzt, liefert

$$0 = \left[a - b\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} - c\cos\frac{2\pi.2x^2}{r\lambda} - d\cos\frac{2\pi.3x^2}{r\lambda}\right]\left[b\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda} + 2c\sin\frac{2\pi.2x^2}{r\lambda} + 3d\sin\frac{2\pi.3x^2}{r\lambda} + \ldots.\right]$$
$$+ \left[b\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda} + c\sin\frac{2\pi.2x^2}{r\lambda} + d\sin\frac{2\pi.3x^2}{r\lambda}\right]\left[b\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} + 2c\cos\frac{2\pi.2x^2}{r\lambda} + 3d\cos\frac{2\pi.3x^2}{r\lambda} + \ldots.\right],$$

eine Gleichung, welche mit $\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda}$ theilbar ist. Daher stehen die Maxima und Minima unter der Formel

$$\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda} = 0,$$

welche wie (15) und (16)

$$\text{die Maxima bei} \quad \cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} = -1$$

$$\text{und die Minima bei} \quad \cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda} = 1$$

giebt.

Was zweitens das durchgehende Licht betrifft, so schreitet die erste Welle von *NP* in ihrer Richtung weiter, die zweite aber mufs von *ABD*, und dann von *EF* reflectirt werden, um nun mit jener gemeinsam weiter zu rücken. Sie hat also grade noch denselben Weg wie im vorigen Falle zurückzulegen, doch ohne den Zuschufs von einer halben Undulation, weil jetzt durch die doppelte Reflexion auch ihre Schwingungsweite das positive Zeichen erhält. Achtet man nur auf zwei Wellen, wie es vollkommen genügt, so steht die Intensität derselben unter der Formel:

$$I = \left\{a + b\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda}\right\}^2 + \left\{b\sin\frac{2\pi x^2}{r\lambda}\right\}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\frac{2\pi x^2}{r\lambda}. \quad (20)$$

$$\text{Demnach sind die Maxima bei } x = 0 = \sqrt{\frac{2\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{4\lambda r}{2}} = \ldots, \quad (21)$$

$$\text{die Minima bei } x = \sqrt{\frac{2\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{3\lambda r}{2}} = \sqrt{\frac{5\lambda r}{2}} = \ldots \quad (22)$$

grade umgekehrt wie beim reflectirten Lichte.

Uebersieht man die bisher gefundenen Resultate, so verhalten sich bei senkrecht einfallendem Lichte die Radien der dunkelsten Stellen in den reflectirten Neutonschen Ringen wie 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, ..., der hellsten Stellen wie $\sqrt{1}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., und in dem durchgelassenen Lichte grade umgekehrt. Neutons Messungen bestätigen diese Angaben der Theorie. Bei Anwendung von weifsem Lichte werden sich die ungleich breiten Ringe der einzelnen Farbestrahlen zu mehr oder weniger ausgebildeten prismatischen Ringen decken, aber auch um desto früher verschwinden, als das Weifs in ihnen bald vorherrscht. Eine graphische Darstellung der verschiedenen Ringe nach den Hauptstrahlen im Spectrum möchte am leichtesten die Farben jener Ringe ergeben, da eine genaue Berechnung viele Umstände mit sich führt.

Wenn die beiden sich berührenden Flächen sphärisch sind, so ist bei senkrecht einfallendem Lichte die Berechnung auf folgende Weise zu führen. *ABC* (Fig. 27.) sei der Durchschnitt der einen Oberfläche, welche zu dem Radius $BO = R$ gehört, *EBD* die andere vom Radius $BP = r$. Die einfallende Welle *GFHI* wird zuerst von *ABC* so reflectirt, als wenn sie aus O' in der Mitte von *BO* durch das Medium der obern Platte herkäme; zweitens geht sie durch *ABC* hindurch, wird dabei nach dem Puncte der rückwärts verlängerten Axe *BO* gebrochen, welcher von *B* um $\frac{R}{n-1}$ abliegt, trifft auf *EBD* und kehrt zurück, als wenn sie aus dem Puncte *X* ausginge, welchen man aus der Gleichung $\frac{1}{BX} = \frac{n-1}{R} + \frac{2}{r}$ oder $BX = \frac{rR}{2R + (n-1)r}$ findet. Legt man nun durch *B* um O' und X' zwei Kreise, so erhält man bis zum Puncte *M* in *ABC*, der durch $BM = x$ gegeben wird, den Weg der ersten Welle $= \frac{nx^2}{2R}$, den Weg der andern mit Hinzufügung der halben Undulation

$= \frac{x^2}{r} + \frac{(n-2)x^2}{2R}$, also zur Bestimmung der gemeinsamen Intensität:

$$I = \left\{a\cos\frac{2\pi.nx^2}{2R\lambda} - b\cos 2\pi\left(\frac{x^2}{r\lambda} + \frac{(n-2)x^2}{2R\lambda}\right)\right\}^2$$

$$+ \left\{a\sin\frac{2\pi.nx^2}{2R\lambda} - b\sin 2\pi\left(\frac{x^2}{r\lambda} + \frac{(n-2)x^2}{2R\lambda}\right)\right\}^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\pi\left\{\frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{R}\right\}\lambda^{-1}. \quad (23)$$

Hiernach findet man die Maxima bei $\cos 2\pi\left\{\frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{R}\right\}\lambda^{-1} = -1, \quad (24)$

die Minima bei $\cos 2\pi\left\{\frac{x^2}{r} - \frac{x^2}{R}\right\}\lambda^{-1} = 1, \quad (25)$

oder die Maxima bei $x = \sqrt{\frac{\lambda r R}{2(R-r)}} = \sqrt{\frac{3\lambda r R}{2(R-r)}} = \sqrt{\frac{5\lambda r R}{2(R-r)}} = \ldots . \quad (26)$

und die Minima bei $x = 0 = \sqrt{\frac{2\lambda r R}{2(R-r)}} = \sqrt{\frac{4\lambda r R}{2(R-r)}} = \ldots . \quad (27)$

Wir wenden uns endlich zu dem allgemeinen Fall, wenn das Licht unter einem beliebigen Winkel ϑ einfällt. Es liege auch hier die Platte $ACDE$ (Fig. 28.) auf dem sphärischen Glase FBG, dessen Radius $OB = r$ sei. Das einfallende Licht $LHMI$ trifft zuerst unter dem Winkel $IHK = \vartheta$ auf DE, wird nach NP unter dem Winkel $PBQ = \vartheta'$ gebrochen, und nun theils reflectirt, theils unter dem Winkel ϑ hindurchgelassen, um von FBG reflectirt zu werden. Man bestimme zuerst den Punct, von welchem die nahe um B reflectirte Welle scheinbar ausgeht. Nimmt man $\angle FOB = \vartheta$, so trifft die Verlängerung des von B reflectirten Strahls den Radius FO in R, und man hat $OR = BR = \frac{1}{2}\frac{r}{\cos\vartheta}$; die Verlängerung des von S reflectirten Strahls, der nahe an B unter $\vartheta - d\vartheta$ auffällt, schneidet FO in T, wo $TO = TS = \frac{1}{2}\frac{r}{\cos(\vartheta - d\vartheta)} = \frac{1}{2}r\left(\frac{1}{\cos\vartheta} - \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\cos^2\vartheta}\right)$ ist. Aus dem $\triangle RTU$ findet man $RU : RT = \sin(2\vartheta - 2d\vartheta) : \sin 2\vartheta$ oder $RU = \frac{1}{2}r\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}$, also ist $UB = \frac{1}{2}r\left(\frac{1}{\cos\vartheta} - \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\right) = \frac{1}{2}r\cos\vartheta$. Der Punct U ist aber der Ausgangspunct des von FBG reflectirten Wellensystems. Hiernach hat es weiter keine Schwierigkeit, die gemeinsame Intensität der beiden reflectirten Wellen in einem beliebigen Puncte X zu bestimmen, der durch $BX = x$ gegeben wird. Es ist nämlich der Weg der ersten Welle bis $X = xn\sin\vartheta' = x\sin\vartheta$, der Weg der andern $= \sqrt{\left\{\frac{r^2\cos^2\vartheta}{4} + x^2 + rx\cos\vartheta\sin\vartheta\right\}} - \frac{r\cos\vartheta + \frac{1}{2}\lambda}{2} = \frac{x^2\cos\vartheta}{r} + x\sin\vartheta + \frac{1}{2}\lambda$, folglich die gemeinsame Intensität:

$$I = \left\{a\cos\frac{2\pi x\sin\vartheta}{\lambda} - b\cos 2\pi\left(\frac{x^2\cos\vartheta}{r} + x\sin\vartheta\right)\lambda^{-1}\right\}^2$$

$$+ \left\{a\sin\frac{2\pi x\sin\vartheta}{\lambda} - b\sin 2\pi\left(\frac{x^2\cos\vartheta}{r} + x\sin\vartheta\right)\lambda^{-1}\right\}^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{2\pi x^2\cos\vartheta}{r\lambda}. \quad (28)$$

Demnach findet man die Maxima bei $\cos\frac{2\pi x^2 \cos\vartheta}{r\lambda} = -1,$ (29)

die Minima bei $\cos\frac{2\pi x^2 \cos\vartheta}{r\lambda} = 1,$ (30)

oder die Maxima bei $x = \sqrt{\frac{r\lambda}{2\cos\vartheta}} = \sqrt{\frac{3r\lambda}{2\cos\vartheta}} = \sqrt{\frac{5r\lambda}{2\cos\vartheta}} = \ldots.$ (31)

und die Minima bei $x = 0 = \sqrt{\frac{2r\lambda}{2\cos\vartheta}} = \sqrt{\frac{4r\lambda}{2\cos\vartheta}} = \ldots.$ (32)

Diese Formeln stimmen mit Neutons Messungen bis auf $\vartheta = 60°$ überein, später geben sie x zu groſs an; allein ehe über ihren Werth ein sicheres Urtheil gefällt wird, scheint es nöthig, durch Wiederholung der Beobachtungen nachzuweisen, daſs man wirklich Linie BP und nicht durch die Strahlenbrechung getäuscht eine andere gemessen habe.

§. IX.

Einige mathematische Sätze als Einleitung zu den Gleichungen, welche die Lichtschwingungen in ein- und zweiaxigen Medien bestimmen.

1. In dem Bisherigen habe ich die Gesetze darzulegen gesucht, welche das Licht bei seinem Durchgange durch gleichförmig elastische Medien befolgt; ich wende mich jetzt zur Fortpflanzung des Lichtes durch ein- und zweiaxige Medien, d. h. durch solche, in welchen die Elasticität des Aethers nach zwei oder nach drei zu einander senkrechten Richtungen ungleiche Kraft übt. Da sämmtliche Gesetze, welche für zweiaxige Medien gelten, leicht auf einaxige zurückgeführt werden können, wenn man die elastische Kraft nach zwei Richtungen gleich setzt, so werde ich die Untersuchung sogleich für den allgemeinen Fall führen und den speciellen, wo es nöthig ist, nachher erläutern. Doch um die nicht ganz einfache Untersuchung möglichst zu vereinfachen, mögen einige mathematische Sätze über einen Körper voranstehn, dessen Kenntniſs im Folgenden von der gröſsten Wichtigkeit ist. Der Körper, den wir betrachten wollen, wird durch die Gleichung gegeben:

$$r^2 = \pi^2 \cos^2 p_r + \nu^2 \cos^2 n_r + \mu^2 \cos^2 m_r. \quad (1)$$

In dieser Gleichung bedeuten π, ν, μ die drei zu einander rechtwinkligen halben Axen des Körpers, von denen π den gröſsten, μ den kleinsten Werth haben mag, r ist ein beliebiger Radius vector, gezogen vom Mittelpunct nach der Oberfläche des Körpers, und p_r, n_r, m_r bezeichnen die Winkel, welche der Radius r mit den drei Axen π, ν und μ bildet. Das Gesetz, nach welchem der fragliche Körper gebildet wird, ist also einfach dieses, daſs das Quadrat jedes seiner Radien gleich der Summe der Quadrate von den auf den Radius projicirten drei halben Axen ist. — Man bestimme zuerst den Radius durch drei beliebige, aber zu einander senkrechte und vom Mittelpunct des Körpers ausgehende Coordinaten, deren Lage dadurch gegeben sei, daſs

x mit π, ν, μ die Winkel p_x, n_x, m_x,

y mit π, ν, μ die Winkel p_y, n_y, m_y

und z mit π, ν, μ die Winkel p_z, n_z, m_z

einschliefst. Man benenne noch die Winkel zwischen r und x, y, z mit α, β, γ, so findet man aufser den übrigen bekannten Relationen, welche zwischen den verschiedenen Winkeln gelten,

$$\cos\alpha = \cos p_r \cos p_x + \cos n_r \cos n_x + \cos m_r \cos m_x,$$
$$\cos\beta = \cos p_r \cos p_y + \cos n_r \cos n_y + \cos m_r \cos m_y,$$
$$\cos\gamma = \cos p_r \cos p_z + \cos n_r \cos n_z + \cos m_r \cos m_z.$$

Setzt man der Kürze halber

$$a = \cos n_y \cos m_z - \cos n_z \cos m_y, \qquad b = \cos n_z \cos m_x - \cos n_x \cos m_z,$$
$$c = \cos n_x \cos m_y - \cos n_y \cos m_x, \qquad d = \cos p_z \cos m_y - \cos p_y \cos m_z,$$
$$e = \cos p_x \cos m_z - \cos p_z \cos m_x, \qquad f = \cos p_y \cos m_x - \cos p_x \cos m_y,$$
$$g = \cos p_y \cos n_z - \cos p_z \cos n_y, \qquad h = \cos p_z \cos n_x - \cos p_x \cos n_z,$$
$$i = \cos p_x \cos n_y - \cos p_y \cos n_x,$$

und

$$N = a \cos p_x + d \cos n_x + g \cos m_x,$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \cos p_r &= \frac{1}{N}(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma), \\ \cos n_r &= \frac{1}{N}(d\cos\alpha + e\cos\beta + f\cos\gamma), \\ \cos m_r &= \frac{1}{N}(g\cos\alpha + h\cos\beta + i\cos\gamma). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es ist aber

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \text{und} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r},$$

setzt man diese Werthe in die Gleichungen (2) und substituirt sie darauf in die Gleichung (1), so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} r^2 = {} & \frac{\pi^2}{r^2 N^2}(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2acxz + 2bcyz) \\ & + \frac{\nu^2}{r^2 N^2}(d^2x^2 + e^2y^2 + f^2z^2 + 2dexy + 2dfxz + 2efyz) \\ & + \frac{\mu^2}{r^2 N^2}(g^2x^2 + h^2y^2 + i^2z^2 + 2ghxy + 2gixz + 2hiyz), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

oder

$$r^4 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz, \quad (4)$$

wenn man der leichtern Uebersicht wegen

$$A = \frac{a^2\pi^2 + d^2\nu^2 + g^2\mu^2}{N^2}, \quad B = \frac{b^2\pi^2 + e^2\nu^2 + h^2\mu^2}{N^2}, \quad C = \frac{c^2\pi^2 + f^2\nu^2 + i^2\mu^2}{N^2},$$
$$D = 2\frac{ab\pi^2 + de\nu^2 + gh\mu^2}{N^2}, \quad E = 2\frac{ac\pi^2 + df\mu^2 + gi\mu^2}{N^2}, \quad F = 2\frac{bc\pi^2 + ef\nu^2 + hi\mu^2}{N^2}$$

einführt. Für $z = 0$ verwandelt sich (4) in die Gleichung für jeden beliebigen durch den Mittelpunct des Körpers gelegten Durchschnitt, und giebt die Radien desselben durch seine zwei zu einander rechtwinkligen Coordinaten x und y. Diese Gleichung ist:

$$r^4 = Ax^2 + By^2 + Dxy. \quad (5)$$

Bayerische Staatsbibliothek München

Die Coordinaten x und y bringe man jetzt auf zwei andere ebenfalls zu einander rechtwinklige Coordinaten X und Y, von denen X mit x den Winkel ψ bildet; so erhält man

$$x = X\cos\psi + Y\sin\psi,$$
$$y = Y\cos\psi - X\sin\psi,$$

und durch Substitution dieser Werthe in (5):

$$\left.\begin{aligned} r^4 = & (A\cos^2\psi + B\sin^2\psi - D\sin\psi\cos\psi)X^2 \\ & + (A\sin^2\psi + B\cos^2\psi + D\sin\psi\cos\psi)Y^2 \\ & + (A\sin 2\psi - B\sin 2\psi + D\cos 2\psi)XY. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wenn man in dieser Gleichung den Winkel ψ so bestimmt, dafs $A\sin 2\psi - B\sin 2\psi + D\cos 2\psi = 0$ wird, so geht sie in die Form über:

$$r^4 = V^2X^2 + W^2Y^2, \quad (7)$$

in welcher zur Abkürzung

$$A\cos^2\psi + B\sin^2\psi - D\sin\psi\cos\psi = V^2$$

und

$$A\sin^2\psi + B\cos^2\psi + D\sin\psi\cos\psi = W^2$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung (7) giebt uns einige wichtige Angaben für die Natur eines jeden beliebigen durch den Mittelpunct unsers Körpers gelegten Durchschnitts. Sie zeigt nämlich 1) dafs der Durchschnitt auf beiden Seiten von der Coordinatenaxe X und ebenso von Y in gleichen Abständen gleiche Radien oder gleiche Durchmesser hat; denn die Radien bleiben sich gleich für $\pm X$ und $\pm Y$. Also theilen die Coordinatenaxen, als Durchmesser betrachtet, den Querschnitt in vier gleiche Theile. Daraus folgt umgekehrt, dafs wenn man in irgend einem Querschnitt die Lage zweier gleichen Durchmesser angeben kann, man die mit X und Y bezeichneten Coordinatenaxen findet, wenn man die von den gleichen Durchmessern eingeschlossenen Winkel halbirt. 2) Differenzirt man Gleichung (7) nach r und setzt $dr = 0$, um den gröfsten und kleinsten Halbmesser im Durchschnitt zu finden, so bekommt man

$$0 = V^2XdX + W^2YdY, \quad (8)$$

und überdies aus $r^2 = X^2 + Y^2$:

$$XdX = -YdY;$$

diesen Werth in (8) substituirt, findet sich der gröfste und kleinste Radius bei $X = 0$ und bei $Y = 0$. Jeder Durchschnitt hat also in der Richtung der X und Y seine kleinste und seine gröfste Axe. Hierbei ist nur der eine Fall übergangen, dafs $V^2 = W^2$ ist, dann ist aber $r^4 = V^2(X^2 + Y^2)$ oder $r^2 = V^2$, die Gleichung eines Kreises. Wir werden sogleich sehen, dafs nur zwei Durchschnitte durch den Körper Kreise sind, während in allen übrigen Durchschnitten die Werthe von V^2 und W^2 differiren. Die Hälften der gröfsten und kleinsten Axen in jedem Querschnitt bezeichnen wir mit e und o. 3) Aus (8) folgt noch $\frac{dX}{dY} = -\frac{W^2Y}{V^2X}$ und $\frac{dY}{dX} = \frac{V^2X}{W^2Y}$; da nun $\frac{dX}{dY}$ und $\frac{dY}{dX}$ die Cotangenten der Winkel sind, welche die Berührungslinien zum Durchschnitte an e und o mit diesen Linien bilden, und man für den ersten Fall $Y = 0$, für den andern $X = 0$ hat, so ergiebt sich, dafs die Berührungslinien an den Axen e und o senkrecht zu denselben stehen. —

Bayerische Staatsbibliothek München

2. Wir legen durch die Axe ν des Körpers einen Durchschnitt senkrecht gegen die Ebene der beiden andern Axen π und μ, welcher von μ um den Winkel n absteht, und bestimmen n so, dafs

$$\nu^2 = \mu^2 \cos^2 n + \pi^2 \sin^2 n$$

ist. Dies giebt

$$\cos^2 n = \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2} \quad (9)$$

und $$\sin^2 n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}. \quad (10)$$

Ein willkürlicher Radius r in diesem Durchschnitte, der um einen Winkel ϱ von der Axe ν absteht, wird nach Gleichung (1) durch

$$r^2 = \pi^2 \cos^2 p_r + \nu^2 \cos^2 n_r + \mu^2 \cos^2 m_r$$

gegeben. Man findet aber

$$\cos^2 n_r = \cos^2 \varrho,$$
$$\cos^2 p_r = \sin^2 n \sin^2 \varrho,$$
$$\cos^2 m_r = \cos^2 n \sin^2 \varrho,$$

also erhält man nach Substitution der oben angegebenen Werthe für $\sin^2 n$ und $\cos^2 n$:

$$r^2 = \frac{\pi^2(\nu^2 - \mu^2)}{\pi^2 - \mu^2} \sin^2 \varrho + \nu^2 \cos^2 \varrho + \frac{\mu^2(\pi^2 - \nu^2)}{\pi^2 - \mu^2} \sin^2 \varrho$$

oder

$$r^2 = \nu^2.$$

Dieser Durchschnitt ist also ein Kreis vom Radius ν. Natürlich giebt es auf der andern Seite von μ in gleichem Abstande von dieser Axe noch einen Kreisdurchschnitt vom Radius ν; beide stehen senkrecht auf der Ebene der $\pi\mu$, und durchschneiden sich unter einem Winkel $= 2n$. Einen dritten Durchschnitt, der ein Kreis wäre, kann es nicht geben, da sonst der Körper eine Kugel würde.

3. Man lege nun um den Mittelpunct C des Körpers eine Kugel von einem Radius $= 1$, und bezeichne in Fig. 29. (worin C nicht angegeben ist) mit P, M, N die Puncte, wo die Axen π, ν, μ die Kugeloberfläche durchschneiden. Die Bogen HI und LG durch N geben die beiden Durchschnitte des Körpers, die wir vorher als Kreise nachgewiesen haben. A und A' sind die Normalen zu denselben, errichtet im Mittelpuncte C; ihr Abstand von einander ist $= 2n$, und wird durch P halbirt. Man ziehe dazu vom Mittelpuncte des Körpers einen willkürlichen Radius, der die Kugeloberfläche in R schneidet, und lege senkrecht zu ihm durch den Mittelpunct eine Ebene $BEDO$. Wir wollen in diesem Durchschnitt die Lage und die Gröfse des kleinsten und gröfsten Radius bestimmen. Zu diesem Zwecke setzen wir die Cosinus der Winkel, welche die Normale R des Durchschnitts mit den Axen μ, ν, π bildet $= \alpha$, β, γ, und nehmen sie, um in dem Folgenden mit den Zeichen keine Störung zu erfahren, sämmtlich positiv, d. h. wir beziehen sie auf diejenigen Axen π, ν, μ, welche dem R zunächst liegen. Demnach haben in der Figur, welche die dem Beobachter zugewandte Seite der Kugeloberfläche darstellt, P und M ihre richtige Lage, N dagegen liegt auf der hintern Seite der Kugel, aus welchem Grunde das vordere N, wo die rückwärts verlängerte Axe ν die Kugel schneidet, mit N' bezeichnet ist. Zieht man vom Mittelpunct des Körpers im Durchschnitt $BEDO$ Radien nach B und D, so sind sie beide gleich lang, nämlich $= \nu$, weil sie zu gleicher Zeit Radien in den gleichen Kreisen $HN'I$ und $LN'G$ sind. Man findet daher nach der

obigen Angabe den gröfsten und kleinsten Radius im Durchschnitte oder die Axen desselben, wenn man BD in E halbirt, und vom Mittelpunct C nach E und senkrecht dazu nach O zieht. Die halbe Axe durch $C = CE$ werde mit e, und durch $O = CO$ mit o bezeichnet. Unsere Aufgabe reduzirt sich jetzt darauf, die Lage und die Gröfse von CE und CO nach der Figur zu bestimmen. Was zuerst die Lage betrifft, so lege man durch C die Kreise PE, AE, $A'E$, RE, $N'E$, ferner PO, AO, $A'O$, RO, $N'O$, endlich $AA'M$, MR, PR, AR und $A'R$, und setze $AR = u$, $A'R = u'$, $ED = EB = 90^0 - k$. Im $\triangle BN'D$ ist $\angle BN'D$, wie schon oben angegeben wurde, $= 180^0 - 2n$, $\angle DBN' = u'$ und $\angle BDN = u$, weil beide Winkel die Neigung der Kreisdurchschnitte zu dem Durchschnitt $BEDO$ messen, die ebenfalls die Winkel zwischen den Normalen CR und CA', desgleichen zwischen CR und CA bestimmen. Denkt man ferner RA' bis zum Bogen BO verlängert, so dafs er ihn in W treffe, welcher Punct in der Figur nicht angegeben ist, so ist $\angle ERA' = EW$, weil RE und $RW = 90^0$ sind; aber B, welches von R und A' um 90^0 absteht, ist als Pol vom Bogen $RA'W$ von W wieder um 90^0 entfernt, folglich ist $EW = 90^0 - BE = k = \angle ERA'$. Auf dieselbe Weise findet man auch $\angle ARE = 90^0 - ED = k$. Somit halbirt ER den Winkel ARA'. Aufserdem haben wir zur Bestimmung von n nach (9) und (10):

$$\cos^2 n = \frac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2} \quad \text{und} \quad \sin^2 n = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}.$$

Aus dem $\triangle BDN'$ erhält man

$$\cos BD - \frac{-\cos 2n + \cos u \cos u'}{\sin u \sin u'},$$

also

$$\cos^2 \frac{BD}{2} = \sin^2 k = \frac{\sin^2 n - \sin^2 \left(\frac{u - u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'} \qquad (11)$$

oder

$$\sin^2 k = \frac{\frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2} - \sin^2 \left(\frac{u - u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'}, \qquad (12)$$

und

$$\sin^2 \frac{BD}{2} = \cos^2 k = \frac{\sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) - \sin^2 n}{\sin u \sin u'} \qquad (13)$$

oder

$$\cos^2 k = \frac{\sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) - \frac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}}{\sin u \sin u'}. \qquad (14)$$

Jetzt ist im $\triangle EDN'$

$$\cos DN' = \sin k \cos EN' + \cos k \sin EN' \cos DEN'$$

und im $\triangle BEN'$

$$\cos BN' = \sin k \cos EN' - \cos k \sin EN' \cos DEN',$$

beide Gleichungen addirt geben

$$\cos EN' = \frac{\cos DN' + \cos BN'}{2 \sin k};$$

es folgt aber aus $\triangle BDN'$

$$\cos DN' = -\cos 2k \cos BN' + \sin 2k \sin BN' \cos u'$$

und

$$\cos BN' = -\cos 2k \cos DN' + \sin 2k \sin DN' \cos u,$$

substituirt man hierin für $\sin BN'$ seinen Werth $\frac{\sin 2k \sin u}{\sin 2n}$, und für $\sin DN'$ seinen Werth $\frac{\sin 2k \sin u'}{\sin 2n}$, so erhält man

$$\cos DN' + \cos 2k \cos BN' = \frac{\sin^2 2k \sin u \cos u'}{\sin 2n}$$

und

$$\cos BN' + \cos 2k \cos DN' = \frac{\sin^2 2k \sin u' \cos u}{\sin 2n},$$

zwei Gleichungen, welche addirt

$$\cos DN' + \cos BN' = \frac{2 \sin^2 k \sin (u + u')}{\sin 2n}$$

geben. Wenn man diesen Werth in die obige Gleichung für $\cos EN'$ setzt, so folgt

$$\cos EN' = \frac{\sin k \sin \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos \left(\frac{u + u'}{2}\right)}{\sin n \cos n};$$

man bezeichne jetzt den Winkel zwischen CE und CN der früheren Analogie gemäfs mit n_e, dann erhält man, da $\cos EN' = -\cos EN = -\cos n_e$ ist,

$$\cos n_e = -\frac{\sin \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos \left(\frac{u + u'}{2}\right) \sin k}{\sin n \cos n}. \quad (15)$$

Um $\cos EP$ zu bestimmen, nehme man aus $\triangle EAP$

$$\cos EA = \cos n \cos EP + \sin n \sin EP \cos APE$$

und aus $\triangle EA'P$

$$\cos EA' = \cos n \cos EP - \sin n \sin EP \cos APE,$$

so findet man

$$\cos EP = \frac{\cos EA + \cos EA'}{2 \cos n}.$$

Die Dreiecke EAR und $EA'R$ geben

$$\cos EA = \sin u \cos k \quad \text{und} \quad EA' = \sin u' \cos k,$$

daher ist

$$\cos EP = \frac{\cos k (\sin u + \sin u')}{2 \cos n},$$

oder, wenn $\angle ECP = p_e$ gesetzt wird,

$$\cos p_e = \frac{\sin \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos \left(\frac{u - u'}{2}\right) \cos k}{\cos n}. \quad (16)$$

Den Winkel zwischen M und E, den wir mit m_e bezeichnen, leitet man hiernach am leichtesten aus der Bedingungsgleichung

$$\cos^2 p_e + \cos^2 n_e + \cos^2 m_e = 1$$

her; daher wird

$$\cos^2 m_e = 1 - \frac{\sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) \sin^2 k}{\sin^2 n \cos^2 n} - \frac{\sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{u - u'}{2}\right) \cos^2 k}{\cos^2 n},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\cos^2 m_e = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 k}{\sin^2 n \cos^2 n} - \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\sin^2 n \cos^2 n} + \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\sin^2 n}$$

$$= 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\sin^2 n}\left(\frac{\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 k + \cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\cos^2 n}\right) + \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\sin^2 n},$$

da aber

$$\frac{\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 k + \cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\cos^2 n} = \frac{\left[\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\right]\cos^2 k + \cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\cos^2 n}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \sin^2 n + \cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\cos^2 n} = 1$$

ist, so wird

$$\cos^2 m_e = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\sin^2 n} + \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\sin^2 n}$$

$$= \frac{\cos^2 k}{\sin^2 n}\left[\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) - \sin u \sin u'\right]$$

$$= \frac{\cos^2 k \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\sin^2 n}.$$

Nach der Zeichnung ist u' kleiner als u angenommen worden, und M liegt auf der entgegengesetzten Seite vom Bogen $AA'O$, daher wird $EM > 90^\circ$ und

$$\cos m_e = -\frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{u}\right)\cos k}{\sin n}. \quad (17)$$

Aus diesen Werthen für die Cosinus der Winkel, welche CE oder e mit den Axen π, ν, μ bildet, findet man nach Gleichung (1) den Werth von e^2 selbst, nämlich

$$e^2 = \pi^2 \cos^2 p_e + \nu^2 \cos^2 n_e + \mu^2 \cos^2 m_e.$$

Wenn man hierin für $\cos^2 m_e$ seinen Werth $1 - \cos^2 p_e - \cos^2 n_e$ und für $\cos^2 p_e$ und $\cos^2 n_e$ ihre in (15) und (16) gefundenen Werthe substituirt, so ergiebt sich

$$e^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\cos^2 n} + (\nu^2 - \mu^2)\frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 k}{\sin^2 n \cos^2 n}.$$

Nimmt man noch für $\sin^2 n$ seinen Werth $\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}$ auf, so folgt

$$e^2 = \mu^2 + (\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k + \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin^2 k}{\cos^2 n}\right),$$

oder, da nach dem Vorigen der letzte Factor $= 1$ ist,

$$e^2 = \mu^2 + (\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right). \quad (18)$$

Hieraus fliefsen noch folgende Gleichungen:

$$e^2 - \pi^2 = -(\pi^2-\mu^2)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right), \quad (19)$$

$$e^2 - \nu^2 = (\mu^2-\nu^2) + (\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right), \quad (20)$$

$$e^2 - \mu^2 = (\pi^2-\mu^2)\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right). \quad (21)$$

Wir gehen hiernach zur Bestimmung der Lage und des Werthes von $CO = o$ über. Aus den Dreiecken DON' und BON' folgt:

$$\cos DN' = \cos k \cos ON' + \sin k \sin ON' \cos DON'$$

und

$$\cos BN' = -\cos k \cos ON' + \sin k \sin ON' \cos DON',$$

zieht man die untere Gleichung von der obern ab, so bekommt man

$$\cos ON' = \frac{\cos DN' - \cos BN'}{2\cos k}.$$

Wenn man die oben zur Berechnung von $\cos n_e$ aufgestellten Formeln berücksichtigt, so wird

$$(\cos DN' - \cos BN')(1-\cos 2k) = \frac{\sin^2 2k \sin(u-u')}{\sin 2n}$$

oder

$$\cos ON' = \frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos k}{\sin n \cos n}.$$

Bezeichnet man nun auch hier $\cos ON$ mit $\cos n_o$, so ist wegen $\cos ON' = -\cos n_o$:

$$\cos n_o = -\frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos k}{\sin n \cos n}. \quad (22)$$

Aus $\triangle APO$ folgt ferner

$$\cos AO = \cos n \cos PO + \sin n \sin PO \cos APO,$$

und aus $\triangle A'PO$

$$\cos A'O = \cos n \cos PO - \sin n \sin PO \cos APO,$$

also

$$\cos PO = \frac{\cos AO + \cos A'O}{2\cos n}.$$

Da die Dreiecke AOR und $A'OR$, in denen $OR = 90^\circ$ ist,

$$\cos AO = -\sin u \sin k \quad \text{und} \quad \cos A'O = \sin u' \sin k$$

geben, so findet man durch Substitution dieser Werthe in die letzte Gleichung

$$\cos PO = -\frac{(\sin u - \sin u')\sin k}{2\cos n},$$

oder nach der Bezeichnung von $\cos p_o$

$$\cos p_o = -\frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin k}{\cos n}. \qquad (23)$$

Den Cosinus des dritten Winkels, nämlich $\cos MO = \cos m_o$ giebt wieder die Bedingungsgleichung

$$\cos^2 p_o + \cos^2 n_o + \cos^2 m_o = 1;$$

substituirt man hierin für $\cos p_o$ und $\cos n_o$ ihre eben gefundenen Werthe, so erhält man

$$\cos^2 m_o = 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\sin^2 n \cos^2 n} - \frac{\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 k}{\cos^2 n},$$

und nach einigen Reductionen

$$\cos^2 m_o = \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin^2 k}{\sin^2 n}.$$

Aber $\cos m_o$ ist positiv, also

$$\cos m_o = \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin k}{\sin n}. \qquad (24)$$

Was die Länge von CO betrifft, so ist nach Gleichung (1)

$$o^2 = \pi^2 \cos^2 p_o + \nu^2 \cos^2 n_o + \mu^2 \cos^2 m_o$$

und mit Berücksichtigung der entwickelten Werthe

$$o^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 k + \cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 k}{\cos^2 n}\right)$$

oder

$$o^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2(\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right), \qquad (25)$$

da der letzte Factor bekanntlich $= 1$ ist. Man leitet hieraus ab:

$$o^2 - \pi^2 = -(\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right), \qquad (26)$$

$$o^2 - \nu^2 = (\mu^2 - \nu^2) + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right), \qquad (27)$$

$$o^2 - \mu^2 = (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right). \qquad (28)$$

Die Art und Weise, wie diese Formeln mit den frühern übereinstimmen, erkennt man leicht. Uebrigens ist noch bei der Bestimmung von o^2 zu beachten, dafs man seinen Werth grade ebenso wie den Werth von e^2 herleiten kann, sofern man nur anstatt des Abstandes der beiden Puncte A und A' den Abstand von A' bis an die entgegengesetzte Verlängerung von CA nimmt, also statt n den Werth $180° - n$; demzufolge geht aber auch k in $90° - k$ und u in $180 - u$ über. In einigen spätern Fällen wird es bequemer sein, auf diese Entwicklung von o^2 einzugehen; darum mag es genügen, hier wenigstens darauf aufmerksam gemacht zu haben.

Nachdem die Werthe von e und o bekannt sind, findet man auf folgende Weise einen bequemern Ausdruck für einen beliebigen Radius vector r in dem Durchschnitte, dessen halbe Axen

eben e und o sind. Nach Gleichung (1) ist nämlich

$$r^2 = \pi^2 \cos^2 p_r + \nu^2 \cos^2 n_r + \mu^2 \cos^2 m_r.$$

Bedeuten aber in Fig. 30. die Buchstaben P, N', M, E, O dasselbe wie in Fig. 29., und ist R der Durchschnittspunkt des Radius r mit der Kugel, welcher um einen Winkel ϱ von E abliegt, so findet man aus den Dreiecken PER und POR

$$\cos p_e = \cos p_r \cos\varrho + \sin p_r \sin\varrho \cos PRE$$

und

$$\cos p_o = \cos p_r \sin\varrho - \sin p_r \sin\varrho \cos PRE,$$

also nach der Elimination von $\sin p_r \cos PRE$

$$\frac{\cos p_r \cos\varrho - \cos p_e}{\sin\varrho} = \frac{\cos p_o - \cos p_r \sin\varrho}{\cos\varrho},$$

oder

$$\cos p_r = \cos p_e \cos\varrho + \cos p_o \sin\varrho.$$

Auf gleiche Weise geben die Dreiecke $EN'R$ und $ON'R$

$$\cos n_e = \cos n_r \cos\varrho - \sin n_r \sin\varrho \cos ERN',$$

$$\cos n_o = \cos n_r \sin\varrho + \sin n_r \cos\varrho \cos ERN',$$

woraus

$$\cos n_r = \cos n_e \cos\varrho + \cos n_o \sin\varrho$$

folgt. Endlich ist

$$\begin{aligned}\cos^2 m_r &= 1 - \cos^2 p_r - \cos^2 n_r \\ &= 1 - \cos^2 p_e \cos^2\varrho - \cos^2 n_e \cos^2\varrho - \cos^2 p_o \sin^2\varrho - \cos^2 n_o \sin^2\varrho \\ &\quad - 2\cos p_e \cos p_o \sin\varrho\cos\varrho - 2\cos n_e \cos n_o \sin\varrho\cos\varrho;\end{aligned}$$

substituirt man hierin für 1 seinen Werth $\cos^2\varrho + \sin^2\varrho$, und bedenkt, dafs

$$1 = \cos^2 p_e + \cos^2 n_e + \cos^2 m_e,$$

$$1 = \cos^2 p_o + \cos^2 n_o + \cos^2 m_o,$$

$$0 = \cos p_e \cos p_o + \cos n_e \cos n_o + \cos m_e \cos m_o$$

ist, so bekommt man

$$\cos m_r = \cos m_e \cos\varrho + \cos m_o \sin\varrho.$$

Nach Substitution dieser Werthe in die Gleichung für r^2 wird

$$\begin{aligned}r^2 = {}&(\pi^2 \cos^2 p_e + \nu^2 \cos^2 n_e + \mu^2 \cos^2 m_e)\cos^2\varrho + (\pi^2 \cos^2 p_o + \nu^2 \cos^2 n_o + \mu^2 \cos^2 m_o)\sin^2\varrho \\ &+ 2(\pi^2 \cos p_e \cos p_o + \nu^2 \cos n_e \cos n_o + \mu^2 \cos m_e \cos m_o)\sin\varrho\cos\varrho\end{aligned}$$

oder

$$r^2 = e^2 \cos^2\varrho + o^2 \sin^2\varrho + 2(\pi^2 \cos p_e \cos p_o + \nu^2 \cos n_e \cos n_o + \mu^2 \cos m_e \cos m_o)\sin\varrho\cos\varrho.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung läfst sich auch schreiben:

$$2[(\pi^2 - \mu^2)\cos p_e \cos p_o + (\nu^2 - \mu^2)\cos n_e \cos n_o]\sin\varrho\cos\varrho;$$

dann ist aber nach den Gleichungen (16) und (23)

$$(\pi^2 - \mu^2)\cos p_e \cos p_o = -\frac{(\pi^2-\mu^2)\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin k\cos k}{\cos^2 n}$$

und

$$(\nu^2 - \mu^2)\cos n_e \cos n_o = \frac{(\nu^2-\mu^2)\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin k\cos k}{\sin^2 n\cos^2 n},$$

wo man sogleich sieht, daſs wenn man für $\sin^2 n$ seinen Werth $\frac{\nu^2-\mu^2}{\pi^2-\mu^2}$ setzt, die Summe der beiden Gleichungen gleich Null wird, somit fällt das letzte Glied in der Formel für r^2 fort, und man erhält

$$r^2 = e^2\cos^2\varrho + o^2\sin^2\varrho. \quad (29)$$

4. Die Cosinus der Winkel zwischen CR und den Axen μ, ν, π, welche oben mit α, β, γ bezeichnet wurden, lassen sich ebenfalls als Functionen von u, u', n und k ausdrücken; dadurch ergeben sich wieder einige neue Formeln für die vorher entwickelten Werthe des $\cos p_e$, $\cos n_e$ etc., deren Form sowohl schön übereinstimmt, als die auch mehrfach benutzt werden können. — Aus den Dreiecken APR und $A'PR$ (Fig. 29.) erhält man nämlich

$$\cos u = \cos PR\cos n + \sin PR\sin n\cos APR,$$

und

$$\cos u' = \cos PR\cos n - \sin PR\sin n\cos APR,$$

folglich

$$\cos PR = \frac{\cos u + \cos u'}{2\cos n}$$

oder

$$\gamma = \frac{\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\cos n}. \quad (30)$$

Ferner zieht man aus den Dreiecken ARM und $A'RM$ folgende Ausdrücke:

$$\cos u = -\sin n\cos RM + \cos n\sin RM\cos PMR,$$
$$\cos u' = \sin n\cos RM + \cos n\sin RM\cos PMR,$$

woraus man

$$\cos RM = \frac{\cos u' - \cos u}{2\sin n},$$

oder

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\sin n} \quad (31)$$

erhält. Den Werth von β giebt die Gleichung

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2;$$

daraus wird nach Substitution der obigen Werthe für α und γ

$$\beta^2 = \frac{\sin^2 n\cos^2 n - \sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos^2 n - \cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin^2 n}{\sin^2 n\cos^2 n};$$

man bringe den zweiten Theil dieser Gleichung unter die Form

$$\frac{1}{\sin^2 n\cos^2 n}\left\{-\sin^4 n - \sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin^2 n + \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin^2 n\right\},$$

so erhält man

$$\beta^2 = \frac{\left[\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \sin^2 n\right]\left[\sin^2 n - \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\right]}{\sin^2 n\cos^2 n};$$

substituirt man hierin für $\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \sin^2 n$ seinen Werth $\cos^2 k\sin u\sin u'$ aus (13), und für

$\sin^2 n - \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)$ seinen Werth $\sin^2 k \sin u \sin u'$ aus (14), so wird

$$\beta = \frac{\sin u \sin u' \sin k \cos k}{\sin n \cos n}. \quad (32)$$

Wir führen zur Abkürzung der Formeln die folgende Gleichung ein:

$$\frac{1}{E} = -(\pi^2 - \mu^2)\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos k, \quad (33)$$

dann finden wir aus

$$\cos p_e = \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos k}{\sin n},$$

wenn wir die Gleichungen (30), (33) und (19) berücksichtigen

$$\cos p_e = \frac{\gamma}{(e^2-\pi^2)E}; \quad (34)$$

ebenso aus

$$\cos n_e = -\frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin k}{\sin n \cos n}$$

mit Berücksichtigung der Gleichungen (32), (33) und (20)

$$\cos n_e = \frac{\beta}{(e^2-\nu^2)E}; \quad (35)$$

endlich aus

$$\cos m_e = -\frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos k}{\sin n}$$

mit Rücksicht auf die Gleichungen (31), (33) und (21)

$$\cos m_e = \frac{\alpha}{(e^2-\mu^2)E}. \quad (36)$$

Auf eine ganz ähnliche Weise lassen sich auch die Werthe für $\cos p_o$, $\cos m_o$, $\cos n_o$ ausdrücken; setzt man nämlich auch hier zur Abkürzung;

$$\frac{1}{O} = (\pi^2-\mu^2)\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin k, \quad (37)$$

so wird man finden

$$\cos p_o = \frac{\gamma}{(o^2-\pi^2)O}, \quad (38)$$

$$\cos n_o = \frac{\beta}{(o^2-\nu^2)O}, \quad (39)$$

$$\cos m_o = \frac{\alpha}{(o^2-\mu^2)O}. \quad (40)$$

Aufserdem leitet man aus den drei Gleichungen (34), (35), (36) wegen

$$1 = \cos^2 p_e + \cos^2 n_e + \cos^2 m_e$$

die Gleichung her

$$E^2 = \left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2, \quad (41)$$

und aus den Gleichungen (38), (39), (40)

$$O^2 = \left(\frac{\alpha}{o^2 - \mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{o^2 - \nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{o^2 - \pi^2}\right)^2. \quad (42)$$

Ferner wegen $\gamma \cos p_e + \beta \cos n_e + \alpha \cos m_e = 0$

$$\frac{\gamma^2}{e^2 - \pi^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} + \frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} = 0, \quad (43)$$

und wegen $\gamma \cos p_o + \beta \cos n_o + \alpha \cos m_e = 0$

$$\frac{\gamma^2}{o^2 - \pi^2} + \frac{\beta^2}{o^2 - \nu^2} + \frac{\alpha^2}{o^2 - \mu^2} = 0. \quad (44)$$

5. Gleich anfangs hatten wir gefunden, dafs eine Berührungslinie an e und o, welche in der Ebene des Durchschnitts selbst liegt, rechtwinklig gegen diese Linien stehet. Es soll jetzt der Winkel gesucht werden, welchen die Berührungslinien bei e und o mit diesen Radien bilden, sofern sie senkrecht gegen die vorigen Berührungslinien gezogen werden. Man lege also durch den Mittelpunkt des Körpers zwei neue Durchschnitte durch CR und CE (Fig. 29.) und ebenso durch CR und CO, welche nach dieser Construction senkrecht auf dem Durchschnitte stehen, dessen Normale CR ist, und man ziehe in diesen Durchschnitten Berührungslinien an e und o. Bezeichnen wir zunächst im Durchschnitt durch e die halben Axen, d. h. den gröfsten und kleinsten Radius desselben, welche nach dem Obigen rechtwinklig zu einander stehen, mit a und b, und schliefst e mit a, dem gröfsern Radius, einen Winkel $= \varrho$ ein, so findet man nach (29), da auch e ein Radius vector in dem senkrechten Durchschnitte ist,

$$e^2 = a^2 \cos^2 \varrho + b^2 \sin^2 \varrho.$$

Wenn ferner q_e den Winkel bedeutet, um welchen die gesuchte Berührungslinie an e von der gegen e Normalen abweicht, so erhält man bekanntlich

$$\operatorname{tang} q_e = -\frac{de}{e\,d\varrho}.$$

Aus der vorigen Gleichung zieht man aber durch Differentiation

$$e\,de = -a^2 \sin\varrho \cos\varrho\, d\varrho + b^2 \sin\varrho \cos\varrho\, d\varrho,$$

daher wird

$$\operatorname{tang} q_e = \frac{(a^2 - b^2) \sin\varrho \cos\varrho}{e^2}.$$

Die hierin noch unbekannten halben Axen a und b im Schnitte durch CE und CR lassen sich ebenso bestimmen, wie vorher e und o im Schnitte, dessen Normale R war, man braucht nur R mit O zu vertauschen. Dazu ist

$$\cos AO = -\sin u \sin k,$$
$$\cos A'O = \sin u' \sin k,$$
$$\sin AO = \sqrt{[1 - \sin^2 u \sin^2 k]},$$
$$\sin A'O = \sqrt{[1 - \sin^2 u' \sin^2 k]}.$$

Werden diese Werthe statt $\cos u$, $\cos u'$, $\sin u$, $\sin u'$ in die Formel (18) für e^2 gesetzt, für welche man auch

$$e^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u + u')$$

schreiben kann, so findet man

$$a^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \{\sin u \sin u' \sin^2 k + \sqrt{[1 - \sin^2 u \sin^2 k][1 - \sin^2 u' \sin^2 k)}\};$$

substituirt man zweitens die obigen Werthe in die Formel (25) für o^2, wofür man

$$o^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cos(u - u')$$

setzen kann, so wird

$$b^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \{\sin u \sin u' \sin^2 k - \sqrt{[1 - \sin^2 u \sin^2 k][1 - \sin^2 u' \sin^2 k]}\}.$$

Ferner folgt aus $e^2 = a^2 \cos^2 \varrho + b^2 \sin^2 \varrho$

$$\cos^2 \varrho = \frac{e^2 - b^2}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad \sin^2 \varrho = \frac{a^2 - e^2}{a^2 - b^2},$$

also

$$\sin \varrho \cos \varrho = \frac{\sqrt{[e^2 - b^2][a^2 - e^2]}}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad (a^2 - b^2) \sin \varrho \cos \varrho = \sqrt{[e^2 - b^2][a^2 - e^2]}.$$

Nachdem man hierin für a^2 und b^2 ihre angegebenen Werthe eingetragen hat, wird

$$(a^2 - b^2) \sin \varrho \cos \varrho$$

$$= \sqrt{\Big\{ -e^4 + e^2 [(\pi^2 + \mu^2) + (\pi^2 - \mu^2) \sin u \sin u' \sin^2 k] - \left[\frac{\pi^2 + \mu^2}{2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin u \sin u' \sin^2 k\right]^2}$$

$$+ \left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\right)^2 [1 - \sin^2 u \sin^2 k - \sin^2 u' \sin^2 k + \sin^2 u \sin^2 u' \sin^4 k]\Big\},$$

oder nach Entfernung von e^4 und e^2 durch die Gleichung (18)

$$e^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right)$$

$$(a^2 - b^2) \sin \varrho \cos \varrho = \sqrt{(\pi^2 - \mu^2)^2 \sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos^2 k};$$

demnach ist

$$\operatorname{tang} q_e = \frac{(\pi^2 - \mu^2) \sin \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos \left(\frac{u + u'}{2}\right) \cos k}{e^2} \qquad (45)$$

oder

$$\operatorname{tang} q_e = -\frac{1}{e^2 E}. \qquad (46)$$

Ueber das Zeichen von $\operatorname{tang} q_e$ oder, was dasselbe ist, über die Richtung der Berührungslinie gegen e im Durchschnitt REC kann man nicht in Verlegenheit kommen, wenn man bedenkt, dafs die gröfsere Axe in diesem Durchschnitte der gröfsern Axe des Körpers, wofür wir die Axe π annehmen, am nächsten liegt, und dafs die Berührungslinie mit e nach a zu einen stumpfen Winkel bildet. In unserer Zeichnung (Fig. 29.) wird daher die Berührungslinie an e nach P zu einen stumpfen Winkel mit e machen. — Durch einen ganz ähnlichen Gang findet man die Tangente des Winkels q_o, um welchen die Berührungslinie an o im Schnitt durch CO und CR von der zu o Normalen abweicht; nämlich

$$\operatorname{tang} q_o = -\frac{(\pi^2 - \mu^2) \sin \left(\frac{u - u'}{2}\right) \cos \left(\frac{u - u'}{2}\right) \sin k}{o^2} \qquad (47)$$

oder

$$\operatorname{tang} q_o = -\frac{1}{o^2 O}. \qquad (48)$$

6. Wir ziehen endlich vom Mittelpuncte C des Körpers im Durchschnitt durch CE und CR (Fig. 29.) eine Linie CS_e, welche von CR um einen Winkel $= q_e$ absteht, jedoch so, dafs sie, wenn π die gröfste halbe Axe des Körpers ist, abwärts von P liegt. Um die Richtung derselben noch anschaulicher zu machen, bemerke ich, dafs wenn wir zu der vorher in 5 untersuchten Berührungslinie an e eine Parallele durch C zögen, diese von R nach P zu, nicht wie jene von P abwärts, liegen würde, aber um denselben Winkel von R abstehend wie S_e. Aufserdem benenne man $\frac{e}{\cos q_e}$ mit r_e. Nun ist im $\triangle S_e PR$ (Fig. 29.), in der jedoch, um Störung zu vermeiden, die Linien PS_e, NS_e, MS_e nicht angezogen sind,

$$\cos PS_e = \cos PR \cos q_e + \sin PR \sin q_e \cos PRS_e;$$

wenn man hierin aus $\triangle EPR$

$$\cos EP = -\sin PR \cos PRS_e$$

substituirt, so wird

$$\cos PS_e = \cos PR \cos q_e - \cos EP \sin q_e$$

oder

$$\frac{r_e \cos PS_e}{e} = \gamma - \cos p_e \operatorname{tang} q_e;$$

man setze aber für $\cos p_e$ aus (34) seinen Werth $\frac{\gamma}{(e^2-\pi^2)E}$, und für $\operatorname{tang} q_e$ aus (46) seinen Werth $-\frac{1}{e^2 E}$, so erhält man

$$r_e \cos PS_e = \gamma \left\{ e + \frac{1}{(e^2-\pi^2)\, e E^2} \right\}. \quad (49)$$

Auf ähnliche Weise findet man aus $\triangle EN'S_e$, worin $ES_e = 90^\circ + RS_e$ ist,

$$\cos N'S_e = -\cos EN' \sin q_e + \sin EN' \cos q_e \cos N'ES_e;$$

da aber im $\triangle REN'$

$$\cos RN' = \sin EN' \cos N'ES_e$$

ist, so wird

$$\cos N'S_e = \cos RN' \cos q_e - \cos EN' \sin q_e$$

oder

$$\frac{r_e \cos NS_e}{e} = \beta - \cos n_e \operatorname{tang} q_e;$$

setzt man hierin wieder für $\cos n_e$ und $\operatorname{tang} q_e$ ihre Werthe aus (35) und (46), so erhält man

$$r_e \cos NS_e = \beta \left\{ e + \frac{1}{(e^2-\nu^2)\, e E^2} \right\}. \quad (50)$$

Endlich giebt $\triangle EMS_e$

$$\cos MS_e = -\cos EM \sin q_e + \sin EM \cos q_e \cos MES_e,$$

substituirt man auch hier aus $\triangle RME$ den Werth für $\sin EM \cos MES_e$, und führt wie vorher die passenden Aenderungen in den Ausdruck ein, so ergiebt sich

$$r_e \cos MS_e = \alpha \left\{ e + \frac{1}{(e^2-\mu^2)\, e E^2} \right\}. \quad (51)$$

Um sich von der Richtigkeit dieser Ausdrücke zu überzeugen, addire man die Quadrate derselben, dann bekommt man, wegen $\cos^2 PS_e + \cos^2 NS_e + \cos^2 MS_e = 1$ und $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$r_e^2 = e^2 + \frac{1}{e^2 E^4} \left\{ \left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2 \right\};$$

da aber nach (41)

$$\left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2=E^2$$

ist, so folgt

$$r_e^2=e^2+\frac{1}{e^2E^2}. \quad (52)$$

Denselben Werth giebt $r_e^2=\frac{e^2}{\cos^2 q_e}=e^2\{1+\operatorname{tang}^2 q_e\}$, denn für $\operatorname{tang}^2 q_e$ seinen Werth $\frac{1}{e^4E^2}$ gesetzt, wird

$$r_e^2=e^2+\frac{1}{e^2E^2}.$$

Wenn im Durchschnitte durch CO und CR eine Linie CS_o nach entsprechender Weise wie CS_e gezogen wird, so kann man ohne weiteres die folgenden Gleichungen bilden, in denen $r_o=\frac{o}{\cos q_o}$ ist:

$$r_o\cos PS_o=\gamma\left\{o+\frac{1}{(o^2-\pi^2)\,o\,O^2}\right\}, \quad (53)$$

$$r_o\cos NS_o=\beta\left\{o+\frac{1}{(o^2-\nu^2)\,o\,O^2}\right\}, \quad (54)$$

$$r_o\cos MS_o=\alpha\left\{o+\frac{1}{(o^2-\mu^2)\,o\,O^2}\right\}. \quad (55)$$

7. Die bisher gefundenen Formeln vereinfachen sich, so oft der in Betracht gezogene Körper zwei gleiche und eine ungleiche Axe hat, nämlich wenn $\nu=\mu$ ist. In diesem Falle ist $n=0$, $k=0$, $u=u'$, $\cos u=\gamma$, $\sin u=\alpha=\sqrt{(1-\gamma^2)}$, $\beta=0$; denn da man in der bisherigen Ebene $\nu\mu$ die jetzt gleichen Axen nach Belieben legen kann, nehme man μ im Durchschnitt von π und CR, wodurch eben $\beta=0$ wird. Nach diesen vereinfachten Ausdrücken ist

$$e^2=\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma^2, \quad (56)$$

$$o^2=\mu^2, \quad (57)$$

$$\frac{1}{E}=-(\pi^2-\mu^2)\gamma\sqrt{(1-\gamma^2)},$$

$$\frac{1}{O}=0,$$

$$\operatorname{tang} q_e=\frac{(\pi^2-\mu^2)\gamma\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma^2}, \quad (58)$$

$$\operatorname{tang} q_o=0, \quad (59)$$

ferner

$$\left.\begin{aligned} r_e\cos PS_e &= \frac{\mu^2\gamma}{\sqrt{(\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma^2)}},\\ r_e\cos NS_e &= 0,\\ r_e\cos MS_e &= \frac{\pi^2\sqrt{(1-\gamma^2)}}{\sqrt{(\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma^2)}}, \end{aligned}\right\}(60) \quad \text{und} \quad \left.\begin{aligned} r_o\cos PS_o &= \mu\gamma,\\ r_o\cos NS_o &= 0,\\ r_o\cos MS_o &= \mu\sqrt{(1-\gamma^2)}. \end{aligned}\right\}(61)$$

$$r_e^2=\frac{\pi^4-(\pi^4-\mu^4)\gamma^2}{\pi^2-(\pi^2-\mu^2)\gamma^2}, \quad (62)$$

$$r_o^2=\mu^2. \quad (63)$$

§. X.

Die Schwingungsgleichungen des Lichtes in ein- und zweiaxigen Medien.

1. Wenn Licht durch ein Medium von ungleich vertheilter Elasticität hindurchgeht, so trennt es sich in der Regel in zwei Büschel, die mit ungleicher Schnelligkeit fortrücken und senkrecht oder wenigstens nahe senkrecht zu einander polarisirt sind. Es mufs daher ein solches Medium die eigenthümliche Wirkung auf die schwingenden Lichtstrahlen hervorbringen, dafs es sie einmal nur nach bestimmten Richtungen schwingen läfst, und sie zweitens je nach den Richtungen schneller oder langsamer befördert. Um uns von diesen besondern Verhältnissen Rechenschaft zu geben, wollen wir das Medium als ein solches annehmen, in welchem die Theilchen nach drei zu einander rechtwinkligen Richtungen ungleich vertheilt sind und dadurch das schwingende Theilchen nach diesen Richtungen mit ungleicher Elasticitätskraft in den Zustand des Gleichgewichts zurückzuführen suchen. Obschon diese Annahme dem im Anfange des §. I. aufgestellten Grundsatze widerspricht, so mag es doch damit zunächst sein Bewenden haben; erst das Folgende kann die Schwierigkeiten zeigen, die für jetzt noch mit diesen Untersuchungen verbunden sind. Auf jeden Fall wenigstens denkt man sich am leichtesten eine ungleiche elastische Kraft in einem Medium, wenn man die Theilchen nach drei zu einander senkrechten Richtungen näher oder weiter von einander abstehen läfst, denn so mufs man es natürlich finden, dafs bei einer Verschiebung irgend eines Theilchens nach der Richtung, wo die Theilchen überhaupt näher an einander liegen, eine gröfsere Kraft entsteht, um es in seine ursprüngliche Stellung zurückzubringen, als nach der Richtung, in der die Theilchen weiter auseinander stehen.

Wir setzen also ein Medium, in welchen nach den zu einander senkrechten Elasticitätsaxen π, ν, μ die Elasticitätskraft $= \pi^2, \nu^2, \mu^2$ ist, und nehmen wie oben π^2 als den gröfsten, μ^2 als den kleinsten Werth an. Die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Theilchens $\mathfrak{m}$, deren Anfangspunct mit dem Anfangspunct der π, ν, μ zusammenfällt, seien

von dem Theilchen $\mathfrak{m}$: $\quad x, \quad y, \quad z,$

von m: $\quad x+\Delta x, \quad y+\Delta y, \quad z+\Delta z,$

von m': $\quad x+\Delta' x, \quad y+\Delta' y, \quad z+\Delta' z$

und so fort. Die Abstände zwischen $\mathfrak{m}$ und m, m' .... seien r, r' ...., und die gegenseitige Wirkung je zweier von diesen Theilchen auf einander werde mit $\mathfrak{m}mf(r)$, $\mathfrak{m}m'f(r')$ .... bezeichnet, wobei es unentschieden bleibt, ob diese Wirkung in gegenseitiger Anziehung oder Abstofsung besteht. Die Richtung, nach welcher diese Wirkung statt findet, fällt nicht immer mit r zusammen, sondern hängt von der Stellung der Linie r gegen die Elasticitätsaxen π, ν, μ ab. Um diese Richtung und überhaupt die Gesammtwirkung aller Theilchen m, m' .... auf $\mathfrak{m}$ zu finden, schliefse r mit den Coordinatenaxen x, y, z die Winkel α, β, γ ein; ferner setze man die Winkel

zwischen π, ν, μ und $x = p_x, n_x, m_x,$

- - π, ν, μ - $y = p_y, n_y, m_y,$

- - π, ν, μ - $z = p_z, n_z, m_z,$

endlich - - π, ν, μ - $r = p_r, n_r, m_r.$

Hiernach findet man die Wirkung des Theilchens m auf $\mathfrak{m}$

$$\text{nach } \pi = \mathfrak{m}\, m f(r)\, \pi^2 \cos p_r,$$
$$\text{nach } \nu = \mathfrak{m}\, m f(r)\, \nu^2 \cos n_r,$$
$$\text{nach } \mu = \mathfrak{m}\, m f(r)\, \mu^2 \cos m_r;$$

demnach durch Zerlegung dieser Wirkungen auf die Coordinatenaxen x, y, z

$$\left.\begin{array}{l}
\text{nach } x = \mathfrak{m}\, m f(r)\, [\pi^2 \cos p_r \cos p_x + \nu^2 \cos n_r \cos n_x + \mu^2 \cos m_r \cos m_x],\\
\text{nach } y = \mathfrak{m}\, m f(r)\, [\pi^2 \cos p_r \cos p_y + \nu^2 \cos n_r \cos n_y + \mu^2 \cos m_r \cos m_y],\\
\text{nach } z = \mathfrak{m}\, m f(r)\, [\pi^2 \cos p_r \cos p_z + \nu^2 \cos n_r \cos n_z + \mu^2 \cos m_r \cos m_z].
\end{array}\right\} \quad (1)$$

Aus den Bedingungsgleichungen

$$\cos\alpha = \cos p_r \cos p_x + \cos n_r \cos n_x + \cos m_r \cos m_x,$$
$$\cos\beta = \cos p_r \cos p_y + \cos n_r \cos n_y + \cos m_r \cos m_y,$$
$$\cos\gamma = \cos p_r \cos p_z + \cos n_r \cos n_z + \cos m_r \cos m_z,$$

findet man wie im vorigen §., wenn man auch hier zur Abkürzung

$$N = \cos p_x (\cos n_y \cos m_z - \cos n_z \cos m_y) + \cos n_x (\cos p_z \cos m_y - \cos p_y \cos m_z)$$
$$+ \cos m_x (\cos p_y \cos n_z - \cos p_z \cos n_y)$$

setzt,

$$\cos p_r = \frac{1}{N}[\cos\alpha(\cos n_y \cos m_z - \cos n_z \cos m_y) + \cos\beta(\cos n_z \cos m_x - \cos n_x \cos m_z)$$
$$+ \cos\gamma(\cos n_x \cos m_y - \cos n_y \cos m_x)],$$

$$\cos n_r = \frac{1}{N}[\cos\alpha(\cos p_z \cos m_y - \cos p_y \cos m_z) + \cos\beta(\cos p_x \cos m_z - \cos p_z \cos m_x)$$
$$+ \cos\gamma(\cos p_y \cos m_x - \cos p_x \cos m_y)],$$

$$\cos m_r = \frac{1}{N}[\cos\alpha(\cos p_y \cos n_z - \cos p_z \cos n_y) + \cos\beta(\cos p_z \cos n_x - \cos p_x \cos n_z)$$
$$+ \cos\gamma(\cos p_x \cos n_y - \cos p_y \cos n_x)];$$

substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (1), so stellt sich die Wirkung des Theilchens m auf $\mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
\text{nach } x = \frac{1}{N}\mathfrak{m}\, m f(r) \{ & \cos\alpha\, \pi^2 \cos p_x (\cos n_y \cos m_z - \cos n_z \cos m_y)\\
& + \cos\beta\, \pi^2 \cos p_x (\cos n_z \cos m_x - \cos n_x \cos m_z)\\
& + \cos\gamma\, \pi^2 \cos p_x (\cos n_x \cos m_y - \cos n_y \cos m_x)
\end{aligned}$$
$$+ \cos\alpha\, \nu^2 \cos n_x (\cos p_z \cos m_y - \cos p_y \cos m_z) + \cos\alpha\, \mu^2 \cos m_x (\cos p_y \cos n_z - \cos p_z \cos n_y)$$
$$+ \cos\beta\, \nu^2 \cos n_x (\cos p_x \cos m_z - \cos p_z \cos m_x) + \cos\beta\, \mu^2 \cos m_x (\cos p_z \cos n_x - \cos p_x \cos n_z)$$
$$+ \cos\gamma\, \nu^2 \cos n_x (\cos p_y \cos m_x - \cos p_x \cos m_y) + \cos\gamma\, \mu^2 \cos m_x (\cos p_x \cos n_y - \cos p_y \cos n_x)\},$$

oder nach Zusammenziehung der Glieder:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{nach } x = \frac{1}{N}\mathfrak{m}\, m f(r) \{\cos\alpha [\;\pi^2 \cos p_x (\cos n_y \cos m_z - \cos n_z \cos m_y)\\
\qquad + \nu^2 \cos n_x (\cos p_z \cos m_y - \cos p_y \cos m_z)\\
\qquad + \mu^2 \cos m_x (\cos p_y \cos n_z - \cos p_z \cos n_y)]\\
+ \cos\beta [(\pi^2 - \mu^2) \cos p_x \cos m_x \cos n_z + (\nu^2 - \pi^2) \cos p_x \cos n_x \cos m_z + (\mu^2 - \nu^2) \cos n_x \cos m_x \cos p_z]\\
+ \cos\gamma [(\pi^2 - \nu^2) \cos p_x \cos n_x \cos m_y + (\mu^2 - \pi^2) \cos p_x \cos m_x \cos n_y + (\nu^2 - \mu^2) \cos n_x \cos m_x \cos p_y]\}.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Auf gleiche Weise

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\text{nach } y = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,m f(r)\,\{\cos\beta\,[\ \pi^2\cos p_y(\cos n_z\cos m_x - \cos n_x\cos m_z)\\&\qquad\qquad + \nu^2\cos n_y(\cos p_x\cos m_z - \cos p_z\cos m_x)\\&\qquad\qquad + \mu^2\cos m_y(\cos p_z\cos n_x - \cos p_x\cos n_z)]\\&+\cos\alpha\,[(\pi^2-\nu^2)\cos p_y\cos n_y\cos m_z + (\mu^2-\pi^2)\cos p_y\cos m_y\cos n_z + (\nu^2-\mu^2)\cos n_y\cos m_y\cos p_z]\\&+\cos\gamma\,[(\pi^2-\mu^2)\cos p_y\cos m_y\cos n_x + (\nu^2-\pi^2)\cos p_y\cos n_y\cos m_x + (\mu^2-\nu^2)\cos n_y\cos m_y\cos p_x]\},\end{aligned}\right.$$

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\text{und nach } z = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,m f(r)\,\{\cos\gamma\,[\ \pi^2\cos p_z(\cos n_x\cos m_y - \cos n_y\cos m_x)\\&\qquad\qquad + \nu^2\cos n_z(\cos p_y\cos m_x - \cos p_x\cos m_y)\\&\qquad\qquad + \mu^2\cos m_z(\cos p_x\cos n_y - \cos p_y\cos n_x)]\\&+\cos\alpha\,[(\pi^2-\mu^2)\cos p_z\cos m_z\cos n_y + (\nu^2-\pi^2)\cos p_z\cos n_z\cos m_y + (\mu^2-\nu^2)\cos n_z\cos m_z\cos p_y]\\&+\cos\beta\,[(\pi^2-\nu^2)\cos p_z\cos n_z\cos m_x + (\mu^2-\pi^2)\cos p_z\cos m_z\cos n_x + (\nu^2-\mu^2)\cos n_z\cos m_z\cos p_x]\}.\end{aligned}\right.$$

Man führe jetzt noch zur Abkürzung der Formeln folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_x &= \pi^2\cos p_x(\cos n_y\cos m_z - \cos n_z\cos m_y) + \nu^2\cos n_x(\cos p_z\cos m_y - \cos p_y\cos m_z)\\&\quad + \mu^2\cos m_x(\cos p_y\cos n_z - \cos p_z\cos n_y),\\\mathfrak{A}_y &= \pi^2\cos p_y(\cos n_z\cos m_x - \cos n_x\cos m_z) + \nu^2\cos n_y(\cos p_x\cos m_z - \cos p_z\cos m_x)\\&\quad + \mu^2\cos m_y(\cos p_z\cos n_x - \cos p_x\cos n_z),\\\mathfrak{A}_z &= \pi^2\cos p_z(\cos n_x\cos m_y - \cos n_y\cos m_x) + \nu^2\cos n_z(\cos p_y\cos m_x - \cos p_x\cos m_y)\\&\quad + \mu^2\cos m_z(\cos p_x\cos n_y - \cos p_y\cos n_x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_x &= (\pi^2-\mu^2)\cos p_x\cos m_x\cos n_z + (\nu^2-\pi^2)\cos p_x\cos n_x\cos m_z + (\mu^2-\nu^2)\cos n_x\cos m_x\cos p_z,\\\mathfrak{B}_y &= (\pi^2-\mu^2)\cos p_y\cos m_y\cos n_x + (\nu^2-\pi^2)\cos p_y\cos n_y\cos m_x + (\mu^2-\nu^2)\cos n_y\cos m_y\cos p_x,\\\mathfrak{B}_z &= (\pi^2-\mu^2)\cos p_z\cos m_z\cos n_y + (\nu^2-\pi^2)\cos p_z\cos n_z\cos m_y + (\mu^2-\nu^2)\cos n_z\cos m_z\cos p_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_x &= (\pi^2-\nu^2)\cos p_x\cos n_x\cos m_y + (\mu^2-\pi^2)\cos p_x\cos m_x\cos n_y + (\nu^2-\mu^2)\cos n_x\cos m_x\cos p_y,\\\mathfrak{C}_y &= (\pi^2-\nu^2)\cos p_y\cos n_y\cos m_z + (\mu^2-\pi^2)\cos p_y\cos m_y\cos n_z + (\nu^2-\mu^2)\cos n_y\cos m_y\cos p_z,\\\mathfrak{C}_z &= (\pi^2-\nu^2)\cos p_z\cos n_z\cos m_x + (\mu^2-\pi^2)\cos p_z\cos m_z\cos n_x + (\nu^2-\mu^2)\cos n_z\cos m_z\cos p_x.\end{aligned}$$

Dann gehen die Formeln (2), (3), (4), welche die Wirkung von m auf $\mathfrak{m}$ geben, in die einfachern über:

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\text{nach } x = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,m f(r)\,[\mathfrak{A}_x\cos\alpha + \mathfrak{B}_x\cos\beta + \mathfrak{C}_x\cos\gamma],\\&\text{nach } y = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,m f(r)\,[\mathfrak{C}_y\cos\alpha + \mathfrak{A}_y\cos\beta + \mathfrak{B}_y\cos\gamma],\\&\text{nach } z = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,m f(r)\,[\mathfrak{B}_z\cos\alpha + \mathfrak{C}_z\cos\beta + \mathfrak{A}_z\cos\gamma].\end{aligned}\right.$$

Die Wirkung der übrigen Theilchen m', m'' .... auf $\mathfrak{m}$ ist der vorigen entsprechend, es verwandeln sich nur m, r, α, β, γ in m', r', α', β', γ' ...., dagegen bleiben N, $\mathfrak{A}_x$ .... constant, da die in ihnen enthaltenen Ausdrücke nur von der Lage der Coordinatenaxen x, y, z gegen die Elasticitätsaxen π, ν, μ und von der Gröſse dieser Axen abhängig sind. Bezeichnet man wie in §. I. die Summe der ähnlichen Glieder mit dem Zeichen S, so erhält man die Gesammtwirkung aller Theilchen m', m'' .... auf $\mathfrak{m}$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{nach } x = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,\{\mathfrak{A}_x\,S[mf(r)\cos\alpha] + \mathfrak{B}_x\,S[mf(r)\cos\beta] + \mathfrak{C}_x\,S[mf(r)\cos\gamma]\},\\
&\text{nach } y = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,\{\mathfrak{C}_y\,S[mf(r)\cos\alpha] + \mathfrak{A}_y\,S[mf(r)\cos\beta] + \mathfrak{B}_y\,S[mf(r)\cos\gamma]\},\\
&\text{nach } z = \frac{1}{N}\,\mathfrak{m}\,\{\mathfrak{B}_z\,S[mf(r)\cos\alpha] + \mathfrak{C}_z\,S[mf(r)\cos\beta] + \mathfrak{A}_z\,S[mf(r)\cos\gamma]\}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

So lange $\mathfrak{m}$ in Ruhe ist, müssen die Gesammtanziehungen nach x, y, z gleich Null sein, also haben wir die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_x\,S[mf(r)\cos\alpha] + \mathfrak{B}_x\,S[mf(r)\cos\beta] + \mathfrak{C}_x\,S[mf(r)\cos\gamma] = 0,\\
&\mathfrak{C}_y\,S[mf(r)\cos\alpha] + \mathfrak{A}_y\,S[mf(r)\cos\beta] + \mathfrak{B}_y\,S[mf(r)\cos\gamma] = 0,\\
&\mathfrak{B}_z\,S[mf(r)\cos\alpha] + \mathfrak{C}_z\,S[mf(r)\cos\beta] + \mathfrak{A}_z\,S[mf(r)\cos\gamma] = 0.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Wir lassen jetzt das Theilchen $\mathfrak{m}$ in eine Schwingung versetzt werden, nehmen aber nach unserm Grundsatze an, daſs diese Schwingungen nur in einer Ebene, in der sogenannten Wellenebene erfolgen, für welche wir die Ebene der xy bestimmen. Die Coordinaten des schwingenden Theilchens mögen sich zu der beliebigen Zeit t in

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z$$

verwandeln, so gehen dem entsprechend die Coordinaten von m in

$$x+\Delta x+\xi+\Delta\xi, \quad y+\Delta y+\eta+\Delta\eta, \quad z+\Delta z$$

über, und so weiter für die übrigen Theilchen. Durch diese Verschiebung der Theilchen wird aus r die Gröſse $r(1+\varepsilon)$, in der jedoch ε wegen der unbedeutenden Schwingungen so klein ist, daſs man ε^2 so wie die Quadrate von $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ übergehen kann. Man findet also aus

$$r^2(1+\varepsilon)^2 = (\Delta x+\Delta\xi)^2 + (\Delta y+\Delta\eta)^2 + (\Delta z)^2,$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x\,\Delta\xi + \Delta y\,\Delta\eta}{r^2}$$

oder

$$\varepsilon = \frac{\cos\alpha\,\Delta\xi + \cos\beta\,\Delta\eta}{r}.$$

Ferner geht $\cos\alpha$ über in $\dfrac{\Delta x+\Delta\xi}{r(1+\varepsilon)} = \dfrac{r\cos\alpha+\Delta\xi}{r(1+\varepsilon)}$,

$\cos\beta$ - - $\dfrac{\Delta y+\Delta\eta}{r(1+\varepsilon)} = \dfrac{r\cos\beta+\Delta\eta}{r(1+\varepsilon)}$,

$\cos\gamma$ - - $\dfrac{\Delta z}{r(1+\varepsilon)} = \dfrac{r\cos\gamma}{r(1+\varepsilon)}$;

endlich verwandelt sich $f(r)$ in $f(r+r\varepsilon)$, was gleich $f(r)+r\varepsilon f'(r)$ ist, sofern $f'(r)$ den Werth $\dfrac{df(r)}{dr}$ bezeichnet. Da nun

$$\frac{f(r)+r\varepsilon f'(r)}{r(1+\varepsilon)} = \frac{f(r)+r\varepsilon f'(r)-\varepsilon f(r)}{r}$$

ist, oder, wenn der Abkürzung wegen $rf'(r)-f(r)$ mit $\mathfrak{F}(r)$ gesetzt wird,

$$\frac{f(r)+r\varepsilon f'(r)}{r(1+\varepsilon)} = \frac{f(r)+\varepsilon\,\mathfrak{F}(r)}{r}$$

ist, so geht

$$f(r)\cos\alpha \quad \text{über in} \quad \frac{f(r)+\varepsilon\,\mathfrak{F}(r)}{r}(r\cos\alpha+\varDelta\xi)$$

$$\text{oder} \quad \text{in} \quad f(r)\cos\alpha+\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi+\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta,$$

$$f(r)\cos\beta \quad \text{in} \quad \frac{f(r)+\varepsilon\,\mathfrak{F}(r)}{r}(r\cos\beta+\varDelta\eta)$$

$$\text{oder} \quad \text{in} \quad f(r)\cos\beta+\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta+\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi,$$

$$f(r)\cos\gamma \quad \text{in} \quad \frac{f(r)+\varepsilon\,\mathfrak{F}(r)}{r}\cos\gamma$$

$$\text{oder} \quad \text{in} \quad f(r)\cos\gamma+\frac{\cos\alpha\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi+\frac{\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta.$$

Setzt man die so umgestalteten Werthe in die Gleichungen (6) und nimmt zugleich auf die Bedingungsgleichungen (7) Rücksicht, so findet sich die Gesammtwirkung aller Theilchen auf $\mathfrak{m}$ während der Schwingung

$$\left.\begin{aligned}
\text{nach } x = \frac{1}{N}\mathfrak{m}\Big\{&\mathfrak{A}_x S\Big[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]+\mathfrak{B}_x S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]\\
&+\mathfrak{C}_x S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]+\mathfrak{A}_x S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]\\
&+\mathfrak{B}_x S\Big[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]+\mathfrak{C}_x S\Big[m\frac{\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]\Big\},\\
\text{nach } y = \frac{1}{N}\mathfrak{m}\Big\{&\mathfrak{C}_y S\Big[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]+\mathfrak{A}_y S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]\\
&+\mathfrak{B}_y S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]+\mathfrak{C}_y S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]\\
&+\mathfrak{A}_y S\Big[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]+\mathfrak{B}_y S\Big[m\frac{\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]\Big\},\\
\text{nach } z = \frac{1}{N}\mathfrak{m}\Big\{&\mathfrak{B}_z S\Big[\mathfrak{m}\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]+\mathfrak{C}_z S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]\\
&+\mathfrak{A}_z S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\Big]+\mathfrak{B}_z S\Big[m\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]\\
&+\mathfrak{C}_z S\Big[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]+\mathfrak{A}_z S\Big[m\frac{\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\Big]\Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Aus diesen Wirkungen werden nach den Gesetzen der Mechanik für die Schwingung von $\mathfrak{m}$ die folgenden Differenzialgleichungen hergeleitet:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{N}\Big\{&S\,m\Big[\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{A}_x+\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{B}_x+\frac{\cos\alpha\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{C}_x\Big]\varDelta\xi\\
&+S\,m\Big[\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{A}_x+\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{B}_x+\frac{\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{C}_x\Big]\varDelta\eta\Big\},\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{N}\Big\{&S\,m\Big[\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{C}_y+\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{A}_y+\frac{\cos\alpha\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{B}_y\Big]\varDelta\xi\\
&+S\,m\Big[\frac{\cos\alpha\cos\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{C}_y+\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{A}_y+\frac{\cos\beta\cos\gamma\,\mathfrak{F}(r)}{r}\mathfrak{B}_y\Big]\varDelta\eta\Big\}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die dritte Wirkung nach z wollen wir zunächst übergehen, weil sie doch nach unserer Annahme gleich Null sein mufs, und somit von ihr keine Differenzialgleichung entstehen kann. — In den beiden Gleichungen (9) treten in $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ sowohl als in $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ die beiden Partialbewegungen der Theilchen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ hervor; wir verlangen aber, dafs die Schwingungen nach x und y von einander unabhängig seien, wir müssen daher für diese Coordinaten in der Ebene xy solche Richtungen suchen, nach welchen die geforderte Trennung erlangt wird. Für diesen Fall giebt es aber in jeder Wellenebene nur zwei zu einander senkrechte Richtungen, die folgendermafsen gefunden werden. Man denke sich um π, ν, μ, deren Anfangspunct wir in $\mathfrak{m}$ setzen, einen Körper nach der Form der elastischen Kraft construirt, in dem man also jeden Radius vector r aus der Gleichung

$$r^2 = \pi^2 \cos^2 p_r + \nu^2 \cos^2 n_r + \mu^2 \cos^2 m_r$$

herleitet. Wie man sieht, ist dies der Körper, dessen Eigenschaften wir im vorigen Paragraphen vorläufig untersucht haben. Wir wollen uns daher auch aller Bezeichnungen bedienen, welche wir dort eingeführt haben. Läfst man nun die Richtung der x nach e und die Richtung der y nach o gehen, so findet die gewünschte Trennung in den Gleichungen (9) statt. Zuerst nämlich ist erwiesen worden, dafs nach beiden Seiten von e und von o die Elasticitätskraft in der Ebene xy gleichmäfsig vertheilt ist, woraus wieder eine nach beiden Seiten gleichmäfsige Vertheilung der wirkenden Theilchen folgt. Zu jedem Theilchen mit den Coordinaten $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$ giebt es daher ein anderes mit den Coordinaten $x+\Delta x$ und $y-\Delta y$, ebenso zu jedem Theilchen mit den Coordinaten $x+\Delta x$ und $y+\Delta y$ ein anderes mit den Coordinaten $x-\Delta x$ und $y+\Delta y$; auch gilt dasselbe von den Coordinaten $z+\Delta z$; somit werden in den Summen aller Glieder, welche die Factoren $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\gamma$, $\cos\beta\cos\gamma$ enthalten, paarweise gleiche Glieder mit entgegengesetzten Zeichen vorkommen, und die Summen selbst werden gleich Null sein. Hiernach reduciren sich für die beantragte Lage der Coordinatenaxen x und y die Gleichungen (9) zunächst auf die einfachern, in denen $\mathfrak{A}_e$, $\mathfrak{B}_e$ und $\mathfrak{C}_o$, $\mathfrak{A}_o$ statt $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{C}_y$, $\mathfrak{A}_y$ der Analogie gemäfs gesetzt sind:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{1}{N}\mathfrak{A}_e\, S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\Delta\xi\right] + \frac{1}{N}\mathfrak{B}_e\, S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\Delta\eta\right],\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= \frac{1}{N}\mathfrak{C}_o\, S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\Delta\xi\right] + \frac{1}{N}\mathfrak{A}_o\, S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\Delta\eta\right].\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Untersuchen wir ferner die Werthe von N, $\mathfrak{A}_e$, $\mathfrak{B}_e$, $\mathfrak{C}_o$ und $\mathfrak{A}_o$. Wir haben hierzu, um die frühern Bezeichnungen zu gebrauchen,

$$\begin{aligned}\cos p_z &= \gamma, & \cos n_z &= \beta, & \cos m_z &= \alpha,\\ \cos p_x &= \cos p_e, & \cos n_x &= \cos n_e, & \cos m_x &= \cos m_e,\\ \cos p_y &= \cos p_o, & \cos n_y &= \cos n_o, & \cos m_y &= \cos m_o.\end{aligned}$$

Daher erhält man, wenn man diese Aenderungen in der obigen Gleichung für N anbringt,

$$N = \cos p_e(\alpha\cos n_o - \beta\cos m_o) + \cos n_e(\gamma\cos m_o - \alpha\cos p_o) + \cos m_e(\beta\cos p_o - \gamma\cos n_o).$$

Man findet aber nach Substitution der Werthe aus den Gleichungen §. IX. (31), (22), (32) und (24)

$$\alpha\cos n_o - \beta\cos m_o = -\frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos k}{\sin^2 n\cos n}\left[\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) + \sin u\sin u'\sin^2 k\right]$$

oder für $\sin^2 k$ seinen Werth $\dfrac{\sin^2 n - \sin^2\left(\dfrac{u-u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'}$ genommen

$$\alpha \cos n_o - \beta \cos m_o = - \frac{\sin\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u-u'}{2}\right)\cos k}{\cos n} = -\cos p_e;$$

ferner aus den Gleichungen §. IX. (30), (24), (31) und (23)

$$\gamma \cos m_o - \alpha \cos p_o = \frac{\sin\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\sin k}{\sin n \cos n}\left[\cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\sin\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\sin k}{\sin n \cos n} = -\cos n_e;$$

endlich aus den Gleichungen §. IX. (32), (23), (30) und (22)

$$\beta \cos p_o - \gamma \cos n_o = - \frac{\sin\left(\dfrac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\cos k}{\sin n \cos^2 n}\left[\sin u \sin u' \sin^2 k - \cos^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)\right],$$

oder, wenn man für $\sin^2 k$ seinen Werth $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{u-u'}{2}\right) - \cos^2 n}{\sin u \sin u'}$ setzt,

$$\beta \cos p_o - \gamma \cos n_o = \frac{\sin\left(\dfrac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\cos k}{\sin n} = -\cos m_e.$$

Substituirt man die eben gefundenen Werthe in die obige Gleichung für N, so wird

$$N = -(\cos^2 p_e + \cos^2 n_e + \cos^2 m_e),$$

oder $$N = -1. \quad (11)$$

Ferner ist

$$\mathfrak{A}_e = \pi^2 \cos p_e (\alpha \cos n_o - \beta \cos m_o) + \nu^2 \cos n_e (\gamma \cos m_o - \alpha \cos p_o) + \mu^2 \cos \mu_e (\beta \cos p_o - \gamma \cos n_o);$$

wenn man auch hierin die eben gefundenen Werthe substituirt, so bekommt man

$$\mathfrak{A}_e = -(\pi^2 \cos^2 p_e + \nu^2 \cos^2 n_e + \mu^2 \cos^2 m_e),$$

oder $$\mathfrak{A}_e = -e^2. \quad (12)$$

Für den Werth von $\mathfrak{A}_o$ hat man

$$\mathfrak{A}_o = \pi^2 \cos p_o (\beta \cos m_e - \alpha \cos n_e) + \nu^2 \cos n_o (\alpha \cos p_e - \gamma \cos m_e) + \mu^2 \cos m_o (\gamma \cos n_e - \beta \cos p_e).$$

Nimmt man die Gleichungen §. IX. (32), (17), (31), (15) zu Hülfe, so bekommt man

$$\beta \cos m_e - \alpha \cos n_e = - \frac{\sin\left(\dfrac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{u+u'}{2}\right)\sin k}{\sin^2 n \cos n}\left[\sin u \sin u' \cos^2 k - \sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)\right],$$

oder für $\cos^2 k$ seinen Werth $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{u+u'}{2}\right) - \sin^2 n}{\sin u \sin u'}$ gesetzt,

$$\beta \cos m_e - \alpha \cos n_e = \frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\sin k}{\cos n} = -\cos p_o;$$

ebenso mittelst der Gleichungen §. IX. (31), (16), (30) und (17)

$$\alpha \cos p_e - \gamma \cos m_e = \frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos k}{\sin n \cos n} = -\cos n_o;$$

endlich mittelst der Gleichungen §. IX. (30), (15), (32) und (16)

$$\gamma \cos n_e - \beta \cos p_e = \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin k}{\cos^2 n \sin n}\left[\cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \sin u \sin u' \cos^2 k\right],$$

oder, nach Substitution von $\cos^2 k = \frac{\cos^2 n - \cos^2\left(\frac{u+u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'}$,

$$\pi \cos n_e - \beta \cos p_e = \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin k}{\sin n} = -\cos m_o.$$

Wenn man diese Werthe in die obige Gleichung für $\mathfrak{A}_o$ setzt, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A}_o = -(\pi^2 \cos^2 p_o + \nu^2 \cos^2 n_o + \mu^2 \cos^2 m_o)$$

oder

$$\mathfrak{A}_o = -o^2. \quad (13)$$

Um noch die mit $\mathfrak{B}_e$ und $\mathfrak{C}_o$ bezeichneten Werthe zu finden, bedient man sich am bequemsten der Gleichungen §. IX. (34.), (35), (36) und (38), (39), (40); durch sie geht die Gleichung

$$\mathfrak{B}_e = (\pi^2 - \mu^2)\beta \cos p_e \cos m_e + (\nu^2 - \pi^2)\alpha \cos p_e \cos n_e + (\mu^2 - \nu^2)\gamma \cos n_e \cos m_e$$

über in die Form

$$\mathfrak{B}_e = \frac{\alpha\beta\gamma}{E^2(e^2-\pi^2)(e^2-\nu^2)(e^2-\mu^2)}[(\pi^2-\mu^2)(e^2-\nu^2)+(\nu^2-\pi^2)(e^2-\mu^2)+(\mu^2-\nu^2)(e^2-\pi^2)],$$

löst man hierin den in der Parenthese enthaltenen Factor auf, so findet man ihn gleich Null, also ist

$$\mathfrak{B}_e = 0. \quad (14)$$

Dasselbe Verfahren auf

$$\mathfrak{C}_o = (\pi^2 - \nu^2)\alpha \cos p_o \cos n_o + (\mu^2 - \pi^2)\beta \cos p_o \cos m_o + (\nu^2 - \mu^2)\gamma \cos n_o \cos m_o$$

angewandt, giebt ebenfalls

$$\mathfrak{C}_o = 0. \quad (15)$$

Durch Subsitution der Gleichungen (11) bis (15) in die Differenzialgleichungen (10) reduciren sich dieselben auf

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= e^2 S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\Delta\xi\right], \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= o^2 S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\Delta\eta\right]; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

und in ihnen findet, wie man sieht, die nothwendige Trennung der zu einander senkrechten Schwingungen statt. Wir erhalten also aus diesen Untersuchungen den Schlufssatz, dafs die Schwingungen der Lichtstrahlen beim Durchgange durch ein ungleich elastisches Medium nicht nach beliebiger Richtung in ihrer Wellenebene erfolgen können, sondern dafs sie nur nach zwei zu einander rechtwink-

ligen Richtungen statt finden. Die beiden Richtungen findet man, wenn man um das schwingende Theilchen einen Körper nach dem Gesetz der Elasticität construirt, und in dem Durchschnitte desselben, welchen die Wellenebene bestimmt, den gröſsten und kleinsten Durchmesser oder die Axen sucht, welche immer rechtwinklig zu einander stehen.

2. Nach diesem wichtigen Resultate müssen wir die Schnelligkeit bestimmen, mit welcher sich das Licht durch das Medium fortpflanzt. Wir integriren hierzu die Gleichungen (16). Nach dem, was früher in §. I. gesagt wurde, sind ξ und η nicht nur periodische Functionen der Zeit, sondern auch der Richtung der Lichtstrahlen nach; bewegen sich also die Wellenebenen nach der Richtung der z zu, senkrecht gegen sich selbst, so hat man, wenn man zunächst nur eine Partialschwingung berücksichtigt,

$$\left.\begin{aligned}\xi &= A \sin kz + B \cos kz,\\ \eta &= A' \sin k'z + B' \cos k'z,\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

worin A, B, A', B' Constanten und Functionen von t sind, k und k' den Werth $\frac{2\pi}{l}$ und $\frac{2\pi}{l'}$ haben, sofern π das Verhältniſs des Umfangs zum Durchmesser des Kreises und l, l' die Wellenlängen bedeuten. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\xi + \Delta\xi &= A \sin(kz + k\Delta z) + B \cos(kz + k\Delta z)\\ &= (A \sin kz + B \cos kz) \cos k\Delta z + (A \cos kz - B \sin kz) \sin k\Delta z,\end{aligned}$$

oder in Betracht, daſs für eine andere Partialschwingung Δz negativ ist

$$\left.\begin{aligned}\Delta\xi &= -2\xi \sin^2 \frac{k\Delta z}{2},\\ \text{ebenso} \quad \Delta\eta &= -2\eta \sin^2 \frac{k'\Delta' z}{2};\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

in der letztern Reihe habe ich $\Delta' z$ geschrieben, weil diese Gröſse mit Δz im Ausdrucke $\Delta\xi$ nicht gleich zu sein braucht.

Substituirt man die Gleichungen (18) in die Formeln (16), so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -2e^2\xi\, S\left[m \frac{f(r) + \cos^2\alpha\, \mathfrak{F}(r)}{r} \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right],\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2o^2\eta\, S\left[m \frac{f(r) + \cos^2\beta\, \mathfrak{F}(r)}{r} \sin^2 \frac{k'\Delta' z}{2}\right],\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}2e^2 S\left[m \frac{f(r) + \cos^2\alpha\, \mathfrak{F}(r)}{r} \sin^2 \frac{k\Delta z}{2}\right] &= s^2\\ \text{und} \quad 2o^2 S\left[m \frac{f(r) + \cos^2\beta\, \mathfrak{F}(r)}{r} \sin^2 \frac{k'\Delta' z}{2}\right] &= s^2\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -s^2\xi,\\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -s^2\eta.\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Bezeichnet Σ die Summe aller Partialschwingungen, so liefert die Integration dieser Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \Sigma[\mathfrak{A} \sin st + \mathfrak{B} \cos st],\\ \eta &= \Sigma[\mathfrak{A}' \sin st + \mathfrak{B}' \cos st],\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

worin 𝔄, 𝔅, 𝔄′, 𝔅′ neue Constanten sind und in s der Werth $\frac{2\pi}{T}$ liegt, sofern auch hier π das Verhältnifs des Umfangs zum Durchmesser des Kreises und T die Zeitdauer einer Undulation ausdrückt. — Für die Schnelligkeit Ω_e des nach e schwingenden Strahls gilt aber die Gleichung

$$\Omega_e = \frac{s}{k};$$

setzt man hierin für s aus (20) seinen Werth

$$e k \sqrt{S\left[2m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\left(\frac{(\varDelta z)^2}{4} - k^2\frac{(\varDelta z)^4}{1.3.8} + \text{etc.}\right)\right]},$$

so wird

$$\Omega_e = e\sqrt{S\left[2m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\left(\frac{(\varDelta z)^2}{4} - k^2\frac{(\varDelta z)^4}{1.3.8} + \text{etc.}\right)\right]}.$$

Schon die Untersuchungen über die Schnelligkeit des Lichtes durch eine gleichförmig elastisches Medium ergeben und das Folgende wird es ebenfalls bestätigen, dafs der Factor

$$\sqrt{S\left[2m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\left(\frac{(\varDelta z)^2}{4} - k^2\frac{(\varDelta z)^4}{1.3.8} + \text{etc.}\right)\right]},$$

sofern man von der Farbenzerstreuung absieht, $= 1$ oder gleich der Schnelligkeit des Lichts im luftleeren Raume zu setzen ist. Demnach erhalten wir

$$\Omega_e = e, \quad (23)$$

und dem entsprechend die Schnelligkeit Ω_o des nach o schwingenden Strahls

$$\Omega_o = o. \quad (24)$$

Durch dieses neue Resultat erfahren wir, dafs sich der nach der einen Richtung schwingende Strahl mit der Schnelligkeit $= e$, der andere senkrecht dazu schwingende mit der Schnelligkeit $= o$ fortpflanzt, wobei die Schnelligkeit des Lichts im luftleeren Raume zur Einheit genommen ist. Sieht man also von dem besondern Falle ab, dafs $e = o$ ist, so gehen beide Strahlen mit ungleicher Schnelligkeit vorwärts, trennen sich von einander und liefern zwei rechtwinklig zu einander polarisirte Lichtbündel. Die Polarisation des Lichtes hängt hiernach mit dem Durchgange desselben durch ein ungleich elastisches Medium nothwendig zusammen.

3. Es bleibt noch zu untersuchen übrig, was die nach z gehende Wirkung zu bedeuten habe, die sich doch aufheben müfste, falls nur Schwingungen in der Wellenebene vorkommen sollen. In einem gleichförmig elastischen Medium sind die Summengleichungen der nach z gehenden Wirkung mit den Factoren $\cos\alpha\cos\gamma$ und $\cos\beta\cos\gamma$ behaftet, die sich bei gleicher Vertheilung der elastischen Kraft wegen der immer paarweise vorkommenden Glieder $+\cos\alpha\cos\gamma$ und $-\cos\alpha\cos\gamma$ u. s. w. aufheben. Da auch in den ungleich elastischen Medien durch die Richtung der Schwingungen nach e und o die gleiche Vertheilung erreicht ist, so heben sich hier ebenfalls die Gleichungen mit den entsprechenden Factoren auf, und als Wirkung nach z bleibt

$$-\mathfrak{B}_z S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\right] - \mathfrak{C}_z S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\right]. \quad (25)$$

Nach dem Vorigen sind aber die $\varDelta\xi$ und $\varDelta\eta$ von einander unabhängig, daher kommt offenbar

das Glied $-\mathfrak{B}_z S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\xi\right]$ auf die nach e

und das Glied $-\mathfrak{C}_z S\left[m\frac{f(r)+\cos^2\beta\,\mathfrak{F}(r)}{r}\varDelta\eta\right]$ auf die nach o

schwingenden Theilchen. Nun ist

$$\mathfrak{B}_z = (\pi^2 - \mu^2)\,\alpha\gamma \cos n_o + (\nu^2 - \pi^2)\,\beta\gamma \cos m_o + (\mu^2 - \nu^2)\,\alpha\beta \cos p_o;$$

substituirt man hierin für α, β, γ, $\cos p_o$, $\cos n_o$, $\cos m_o$ ihre schon oben berührten Werthe aus §. IX., und berücksichtigt, dafs $\sin^2 k = \dfrac{\sin^2 n - \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'}$, $\cos^2 n = \dfrac{\pi^2 - \nu^2}{\pi^2 - \mu^2}$, $\sin^2 n = \dfrac{\nu^2 - \mu^2}{\pi^2 - \mu^2}$ ist, so findet man nach einigen Reductionen

$$\mathfrak{B}_z = -(\pi^2 - \mu^2) \sin\left(\frac{u+u'}{2}\right) \cos\left(\frac{u+u'}{2}\right) \cos k. \quad (26)$$

Wenn man dieselben Substitutionen in

$$\mathfrak{C}_z = (\pi^2 - \nu^2)\,\beta\gamma \cos m_e + (\mu^2 - \pi^2)\,\alpha\gamma \cos n_e + (\nu^2 - \mu^2)\,\alpha\beta \cos p_e$$

anbringt, so bekommt man

$$\mathfrak{C}_z = (\pi^2 - \mu^2) \sin\left(\frac{u-u'}{2}\right) \cos\left(\frac{u-u'}{2}\right) \sin k. \quad (27)$$

Vergleicht man jetzt die Wirkung nach z für die nach e schwingenden Theilchen mit der Wirkung nach e selbst, so stellt sie sich im Verhältnifs zu ihr auf

$$\frac{(\pi^2 - \mu^2) \sin\left(\frac{u+u'}{2}\right) \cos\left(\frac{u+u'}{2}\right) \cos k}{e^2},$$

welcher Werth $= \operatorname{tang} q_e$ ist. Wenn man dieselbe Vergleichung auf die nach o schwingenden Theilchen anwendet, so ergiebt sich das Verhältnifs des Zuges nach z als

$$-\frac{(\pi^2 - \mu^2) \sin\left(\frac{u-u'}{2}\right) \cos\left(\frac{u-u'}{2}\right) \sin k}{o^2},$$

welcher Werth wieder $= \operatorname{tang} q_o$ ist.

Man sieht nicht wohl ab, wie diese noch vorhandenen Wirkungen nach z anders aufgehoben werden können, als wenn senkrecht zur Wellenebene, also nach z, nicht alle Theilchen, wie wir annahmen, in Schwingung gerathen, sondern wenn nach dieser Richtung so viele Theilchen, als das Verhältnifs angiebt, aufser Wirksamkeit oder, was dasselbe ist, während der Schwingung in Ruhe bleiben. Dann müfste sich die, soweit die Theilchen schwingen, abgeschlossen gedachte Wellenebene nicht nach der zu ihr senkrechten Richtung fortbewegen, sondern sie würde sich parallel bleibend um einen Winkel von ihrer Normale fortschieben, der in dem einen Falle $= q_e$, in dem andern $= q_o$ wäre. Und dieses Verhältnifs findet in der That statt, denn der Strahl bildet mit der zur Wellenebene Normalen einmal den Winkel q_e, im andern Falle den Winkel q_o.

Doch um über diesen wichtigen Satz keine Bedenklichkeit zurückzulassen, wollen wir die Fortbewegungslinie der Wellenebene oder die Richtung des Strahls noch auf eine andere Weise herleiten und damit die Richtigkeit der obigen Schlufsfolge erhärten. Die Wellenebene eines Lichtstrahls, deren Normale mit den Axen μ, ν, π Winkel bildet, deren Cosinus α, β, γ sind, und die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, wird durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (28)$$

gegeben, worin die Coordinaten x, y, z mit den Axen μ, ν, π parallel laufen. In der Zeit, worin der Strahl im luftleeren Raume einen Weg $= 1$ zurücklegen würde, rückt die Wellenebene, sofern

sie zum Strahl, dessen Schwingungen wir auf e bezogen, gehört, um einen Weg $= e$ vor, und ihre Gleichung nach dieser Zeit wird

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = e. \quad (29)$$

Für die nächst gelegenen Wellen gehen α, β, γ in $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ über, und man erhält die Richtung des Strahls, wenn man den gemeinsamen Berührungspunct dieser Wellenebenen mit der sie tangirenden Ebene sucht; denn bekanntlich liegt die gemeinsame Wellenebene aller Partialwellen in der sie gemeinsam tangirenden Ebene. Differenziirt man also die Gleichung (29) nach α und β, so erhält man

$$x + \frac{d\gamma}{d\alpha} z = \frac{de}{d\alpha}, \quad (30)$$

$$y + \frac{d\gamma}{d\beta} z = \frac{de}{d\beta}, \quad (31)$$

und die Coordinaten x, y, z, welche diese 3 Gleichungen (29), (30) und (31) geben, sind die Coordinaten des Strahls zur angenommenen Zeit. Aus der Bedingungsgleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

folgt

$$\alpha + \gamma \frac{d\gamma}{d\alpha} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\gamma}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

$$\beta + \gamma \frac{d\gamma}{d\beta} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{\beta}{\gamma};$$

ferner aus der Gleichung §. IX. (44)

$$\frac{\alpha^2}{e^2 - \mu^2} + \frac{\beta^2}{e^2 - \nu^2} + \frac{\gamma^2}{e^2 - \pi^2} = 0$$

ergiebt sich

$$\frac{\alpha}{e^2 - \mu^2} - \frac{\alpha}{e^2 - \pi^2} - e\left[\left(\frac{\alpha}{e^2 - \mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2 - \nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2 - \pi^2}\right)^2\right] \frac{de}{d\alpha} = 0,$$

und

$$\frac{\beta}{e^2 - \nu^2} - \frac{\beta}{e^2 - \pi^2} - e\left[\left(\frac{\alpha}{e^2 - \mu^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{e^2 - \nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{e^2 - \pi^2}\right)^2\right] \frac{de}{d\beta} = 0,$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichung §. IX. (41)

$$\frac{de}{d\alpha} = \frac{\alpha}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2 - \mu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right),$$

$$\frac{de}{d\beta} = \frac{\beta}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2 - \nu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right)$$

folgt. Wenn man diese Werthe in die obigen Gleichungen substituirt, so wird

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = e,$$

$$x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \frac{\alpha}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2 - \mu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right),$$

$$y - \frac{\beta}{\gamma} z = \frac{\beta}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2 - \nu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right);$$

multiplicirt man die zweite mit α, die dritte mit β und addirt sie, so bekommt man

$$\alpha x + \beta y - \left(\frac{\alpha^2}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma}\right) z = \frac{\alpha^2}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2 - \mu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right) + \frac{\beta^2}{eE^2}\left(\frac{1}{e^2 - \nu^2} - \frac{1}{e^2 - \pi^2}\right),$$

oder

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \frac{z}{\gamma} = -\frac{\gamma^2}{(e^2 - \pi^2)\,e E^2} - \frac{\alpha^2}{(e^2 - \pi^2)\,e E^2} - \frac{\beta^2}{(e^2 - \pi^2)\,e E^2},$$

oder mit Berücksichtigung der ersten Gleichung

$$z = \gamma \left\{ e + \frac{1}{(e^2 - \pi^2)\,e E^2} \right\},$$

ebenso

$$x = \alpha \left\{ e + \frac{1}{(c^2 - \mu^2)\,e E^2} \right\}, \quad (32)$$

$$y = \beta \left\{ e + \frac{1}{(e^2 - \nu^2)\,e E^2} \right\}.$$

Wenn man hiernach die Länge des Strahls vom Anfangspunct der Coordinaten bis zum Berührungspuncte S_e der Wellenebenen mit der tangirenden Ebene mit r_e bezeichnet, und die Winkel zwischen dem Strahl und den Axen π, ν, μ durch die Bogen PS_e, NS_e, MS_e mifst, so kann man in den Gleichungen (32) statt z, x, y die Werthe $r_e \cos PS_e$, $r_e \cos MS_e$, $r_e \cos NS_e$ setzen. In dieser Form vergleiche man sie mit den Gleichungen §. IX. (49), (50), (51), und man wird sogleich sehen, dafs der Strahl von der zur Wellenebene Normalen um den Winkel q_e abweicht, und zwar in der Ebene, welche durch die Normale und e gelegt wird. Ganz dieselbe Entwicklung findet auch für den Strahl durch o statt. Demnach wird die Richtung der Strahlen durch die im vorigen §. angegebene Lage der Linien CS_e und CS_o vollkommen bestimmt und zu gleicher Zeit ist der oben aus der nicht aufgehobenen Wirkung nach der zur Wellenebene Normalen gezogene Schlufs bestätigt.

4. Wir haben endlich noch die Wellenoberfläche überhaupt zu bestimmen, wenn sich das Licht aus einem Puncte in einem ungleich elastischen Medium nach allen Seiten unbehindert verbreitet. Nehmen wir zuerst an, das Licht bestehe nur aus den Strahlen, welche wir mit e bezeichnen, so sind nach (32) die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punctes der Wellenoberfläche

$$x = \alpha \left\{ e + \frac{1}{(e^2 - \mu^2)\,e E^2} \right\},$$

$$y = \beta \left\{ e + \frac{1}{(e^2 - \nu^2)\,e E^2} \right\},$$

$$z = \gamma \left\{ e + \frac{1}{(e^2 - \pi^2)\,e E^2} \right\}.$$

Setzt man hierin aus r_e^2 oder mit Fortlassung des Index e aus

$$r^2 = e^2 + \frac{1}{e^2 E^2}$$

für $\frac{e^4 E^2 + 1}{e^2 E^2}$ den Werth r^2, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r^2 - \mu^2} &= \frac{\alpha e}{e^2 - \mu^2}, \\ \frac{y}{r^2 - \nu^2} &= \frac{\beta e}{e^2 - \nu^2}, \\ \frac{z}{r^2 - \pi^2} &= \frac{\gamma e}{e^2 - \pi^2}; \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt

$$\left(\frac{x}{r^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{r^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{z}{r^2-\pi^2}\right)^2 = e^2\left\{\left(\frac{\alpha}{e^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{e^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{e^2-\pi^2}\right)^2\right\},$$

oder mit Beachtung von §. IX. (41)

$$\left(\frac{x}{r^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{r^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{z}{r^2-\pi^2}\right)^2 = e^2E^2. \quad (34)$$

Man substituire ferner die aus (33) gezogenen Werthe

$$\alpha = \frac{x}{e}\cdot\frac{e^2-\mu^2}{r^2-\mu^2}, \qquad \beta = \frac{y}{e}\cdot\frac{e^2-\nu^2}{r^2-\nu^2}, \qquad \gamma = \frac{z}{e}\cdot\frac{e^2-\pi^2}{r^2-\pi^2}$$

in die Gleichung §. IX. (44)

$$\frac{\alpha^2}{e^2-\mu^2}+\frac{\beta^2}{e^2-\nu^2}+\frac{\gamma^2}{e^2-\pi^2} = 0,$$

so findet man

$$\frac{x^2(e^2-\mu^2)}{(r^2-\mu^2)^2}+\frac{y^2(e^2-\nu^2)}{(r^2-\nu^2)^2}+\frac{z^2(e^2-\pi^2)}{(r^2-\pi^2)^2} = 0,$$

oder, wenn man für e^2 seinen Werth $r^2-\frac{1}{e^2E^2}$ setzt,

$$\frac{x^2}{r^2-\mu^2}+\frac{y^2}{r^2-\nu^2}+\frac{z^2}{r^2-\pi^2}-\frac{1}{e^2E^2}\left\{\left(\frac{x}{r^2-\mu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{r^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{z}{r^2-\pi^2}\right)^2\right\} = 0. \quad (35)$$

Da der letzte Theil nach (34) $= 1$ ist, so wird

$$\frac{x^2}{r^2-\mu^2}+\frac{y^2}{r^2-\nu^2}+\frac{z^2}{r^2-\pi^2}-1 = 0$$

woraus man, wenn man $1 = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$ setzt, die Gleichung der Wellenoberfläche

$$\frac{\mu^2x^2}{r^2-\mu^2}+\frac{\nu^2y^2}{r^2-\nu^2}+\frac{\pi^2z^2}{r^2-\pi^2} = 0 \quad (36)$$

erhält. Die Strahlen, welche wir mit o bezeichnen, stimmen in allen benutzten Formeln mit den Strahlen e überein, sofern man e in o und E in O verwandelt, da aber diese Gröfsen in der Endgleichung (36) nicht weiter vorkommen, so gilt dieselbe Gleichung auch für die zu o gehörigen Strahlen. — Häufig wird die Gleichung der Wellenoberfläche unter die Form gebracht

$$\mu^2x^2(r^2-\nu^2)(r^2-\pi^2)+\nu^2y^2(r^2-\mu^2)(r^2-\pi^2)+\pi^2z^2(r^2-\mu^2)(r^2-\nu^2) = 0;$$

löst man hierin die Factoren auf, setzt $\mu^2\nu^2\pi^2(x^2+y^2+z^2) = \mu^2\nu^2\pi^2r^2$, dividirt mit r^2, so bekommt man

$$r^2(\mu^2x^2+\nu^2y^2+\pi z^2)-\mu^2(\nu^2+\pi^2)x^2-\nu^2(\mu^2+\pi^2)y^2-\pi^2(\mu^2+\nu^2)z^2+\mu^2\nu^2\pi^2 = 0. \quad (37)$$

Diese allgemeine Form der Wellenoberfläche läfst sich nicht in zwei Factoren zerlegen, wodurch sich die Wellen der beiden Strahlenarten trennen würden. Ist dagegen $\nu = \mu$, d. h. ist das Medium ein einaxiges, so verwandelt sich die Gleichung (37) in

$$[x^2+y^2+z^2-\mu^2][\mu^2x^2+\mu^2y^2+\pi^2z^2-\mu^2\pi^2] = 0. \quad (38)$$

Der erste Factor $x^2+y^2+z^2 = \mu^2$ oder $r^2 = \mu^2$ gehört einer Kugel vom Radius μ an, also verbreitet sich das eine Strahlensystem ganz in der Weise, als wenn das Medium ein gleichförmiges wäre; der andere Factor

$$\mu^2x^2+\mu^2y^2+\pi^2z^2 = \mu^2\pi^2 \quad (39)$$

gehört einem Revolutionsellipsoid an, dessen Polarradius $= \mu$ und dessen Aequatorialradius $= \pi$ ist.

§. XI.

Die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung.

Im vorigen §. sind schon sämmtliche Formeln angedeutet, welche die Richtung des Strahls bei seinem Uebergange aus einem gleichförmigen in ein ungleich elastisches Medium und umgekehrt bestimmen. Wir haben gesehen, dafs sich der Strahl im ungleich elastischen Medium der Regel nach in zwei Strahlen trennt (woher eben der Name der doppelten Brechung kommt); der eine der beiden Strahlen folgt den Gesetzen, welche für die mit o bezeichneten Lichtschwingungen entwickelt wurden, man nennt ihn den gewöhnlichen Strahl, der andere den Gesetzen, welche für die mit e bezeichneten Lichtschwingungen gelten, er heifst der ungewöhnliche Lichtstrahl. — Doch wegen der Bedeutung, welche die doppelte Strahlenbrechung hat, wird es gut sein, die Richtung der Strahlen noch durch mehr übersichtliche Formeln zu erläutern.

1. Wir beginnen mit dem einaxigen Medium, in welchem $\mu = \nu$ ist. In diesem ist die Schnelligkeit des gewöhnlichen Strahls constant $= \mu$; daher folgt er ganz den Gesetzen der Brechung in gleichförmig elastischen Medien. Bildet der einfallende Strahl den Winkel φ mit der Normale zur brechenden Ebene, und der gebrochene Strahl mit derselben Ebene den Winkel φ' (denn in Bezug auf den Strahl o sollen sämmtliche Zeichen oben einen Strich bekommen), so hat man

$$\sin\varphi' = \mu \sin\varphi, \quad (1)$$

und beide Strahlen, der einfallende und gebrochene, liegen mit der Normale in ein und derselben Ebene. —

Die Schnelligkeit des ungewöhnlichen Strahls ist allgemein $= e$; setzt man daher den Winkel, welchen die Normale zur ungewöhnlichen Wellenebene mit der Normale zur brechenden Ebene bildet, $= \varphi''$, so folgt aus dem oben bei den gleichförmigen Medien entwickelten Satze, dafs die einfallende und gebrochene Wellenebene ohne Unterbrechung in stetigem Zusammenhange fortrücken müssen,

$$\sin\varphi'' = e \sin\varphi, \quad (2)$$

worin e nach §. IX. (56) durch

$$e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2$$

gegeben wird. Dem γ'' sind hier die beiden Striche oben hinzugefügt worden, um die Beziehung auf die ungewöhnliche Wellenebene anzudeuten; übrigens bedeutet γ'' auch hier den Cosinus des Winkels, welchen die Normale zur Wellenebene mit der Axe π einschliefst. Die Gleichung (2) genügt, um die Lage der gebrochenen Wellenebene zu bestimmen; der Strahl selbst geht aber nicht nach der Richtung der zu seiner Wellenebene Normalen, sondern entfernt sich von ihr unter einem Winkel $= q_e$ oder hier der Gleichmäfsigkeit wegen unter einem Winkel $= q''$. Seine wahre Richtung wollen wir durch Fig. 31. deutlich machen. Es sei im Einfallspunkt C des Strahles die Normale N zur brechenden Ebene errichtet, für welche man die Ebene des Papiers nehme (C konnte in der Figur nicht angegeben werden); N liege nach unterwärts, P ebenfalls nach unterwärts sei der Durchschnittspunct der Axe π des Crystalls mit einer um C gelegten Kugel vom Radius $= 1$. Legt man einen gröfsten Kreis durch PC und NC, der also senkrecht zur brechenden Ebene steht und den Namen des Hauptschnitts führt, so endet die Axe μ in M 90° von P entfernt. Ferner werde die Einfallsebene des Strahls durch ENR bezeichnet, sie schliefse mit dem Hauptschnitt den Winkel w ein, und die Normale der gebrochenen Wellenebene falle nach R, so dafs $\angle NCR = \varphi'$,

und $\cos PCR = \gamma''$ ist. Bei diesen Voraussetzungen weicht der Lichtstrahl von CR in der Ebene durch PC und RC ab, und zwar wenn π gröſser als μ und zugleich $\angle PCR$ kleiner als 90° ist, rückwärts von P; er geht also von C nach S, und bildet mit RC den Winkel $RCS = q''$. Jetzt ist es leicht, den Winkel $SCN = \vartheta''$ und den Winkel w'', welchen die Ebene durch RC und NC mit der Ebene durch SC und NC einschlieſsen, oder das Azimuth des Strahles CS gegen die Einfallsebene zu berechnen und dadurch die Richtung des ungewöhnlich gebrochenen Strahls vollkommen zu bestimmen. Setzt man nämlich, um die Lage der brechenden Ebene gegen die Axe π des Crystalls zu geben, $\cos NCP = C$ und $\sin NCP = \cos MCP = A$, so folgt aus $\triangle PRN$

$$\cos PR = \gamma'' = C \cos\varphi'' + A \sin\varphi'' \cos w, \qquad (3)$$

und nach Substitution dieses Werthes in die Gleichung für e^2 aus (2)

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi \left\{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)(C\cos\varphi'' + A \sin\varphi'' \cos w)^2\right\}, \qquad (4)$$

woraus man φ'' bei gegebenem φ am leichtesten durch allmählige Annäherung berechnet. Ferner giebt $\triangle PRN$

$$\sin PRN = \frac{A \sin w}{\sqrt{(1-\gamma''^2)}} \qquad \text{und} \qquad \cos PRN = \frac{C - \gamma'' \cos\varphi''}{\sin\varphi'' \sqrt{(1-\gamma''^2)}};$$

demnach erhält man aus $\triangle NRS$

$$\cos NS = \cos\vartheta'' = \cos\varphi'' \cos RS - \sin\varphi'' \sin RS \cos PRN;$$

substituirt man hierin für $\cos PRN$ den obigen Werth, und für $\cos RS$ und $\sin RS$ ihre Werthe nach der Gleichung §. IX. (58)

$$\operatorname{tang} q'' = \operatorname{tang} RS = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma'' \sqrt{(1-\gamma''^2)}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2},$$

so findet man nach einigen Reductionen

$$\cos\vartheta'' = \frac{\pi^2 \cos\varphi'' - (\pi^2 - \mu^2) C \gamma''}{\sqrt{[\pi^4 - (\pi^4 - \mu^4)\gamma''^2]}}$$

oder

$$\cos\vartheta'' = \frac{\cos\varphi'' - \dfrac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2} C\gamma''}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\pi^4 - \mu^4}{\pi^4}\gamma''^2\right)}}. \qquad (5)$$

Zur Bestimmung von w'' folgt aus $\triangle RNS$

$$\sin w'' = \frac{\sin RS \sin NRP}{\sin\vartheta''}$$

und

$$\cos w'' = \frac{\cos RS - \cos\vartheta'' \cos\varphi''}{\sin\varphi'' \sin\vartheta''},$$

woraus man durch Division

$$\operatorname{tang} w'' = \frac{\sin\varphi'' \sin NRP \operatorname{tang} RS}{1 - \dfrac{\cos\varphi'' \cos\vartheta''}{\cos RS}}$$

ableitet. Die Substitution der entsprechenden Werthe für $\sin NRP$, $\operatorname{tang} RS$ und $\cos RS$ giebt

$$\operatorname{tang} w'' = \frac{\dfrac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2} A\gamma'' \sin w}{\sin\varphi'' - \dfrac{\pi^2 - \mu^2}{\pi^2} A\gamma'' \cos w}. \qquad (6)$$

Die beiden Gleichungen (5) und (6), welche den Neigungswinkel des Strahls und sein Azimuth gegen die Einfallsebene geben, genügen zur Bestimmung seiner Richtung.

2. In einigen Fällen erlangen die beiden Gleichungen eine einfachere Form. Die wichtigsten sind erstens, wenn $A = 0$, also $C = 1$ und $\gamma'' = \cos\varphi''$ ist; in diesem Falle steht die Axe π oder schlechthin die Axe des Crystalls senkrecht zur brechenden Ebene. Man findet hier

$$\operatorname{tang} w'' = 0,$$

d. h. der Strahl bleibt in der Einfallsebene; ferner

$$\cos\vartheta'' = \frac{\mu^2 \cos\varphi''}{\sqrt{(\mu^4 \cos^2\varphi'' + \pi^4 \sin^2\varphi'')}},$$

und daraus

$$\operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\pi^2 \operatorname{tang}\varphi''}{\mu^2};$$

da übrigens

$$\sin^2\varphi\,(\pi^2 \sin^2\varphi'' + \mu^2 \cos^2\varphi'') = \sin^2\varphi''$$

ist, so wird

$$\operatorname{tang}^2\varphi'' = \frac{\mu^2 \sin^2\varphi}{1 - \pi^2 \sin^2\varphi}$$

und

$$\operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\pi^2 \sin\varphi}{\mu\sqrt{(1 - \pi^2 \sin^2\varphi)}}.$$

Zweitens sei $w = 90^0$ und $C = 0$, also die Axe des Crystalls liege in der brechenden Ebene und der Strahl falle senkrecht gegen den Hauptschnitt ein. Man bekommt hier

$$\operatorname{tang} w'' = 0,$$
$$\cos\vartheta'' = \cos\varphi''$$

oder wegen $\pi \sin\varphi = \sin\varphi''$

$$\operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\pi \sin\varphi}{\sqrt{(1 - \pi^2 \sin^2\varphi)}}.$$

Drittens sei $w = 0$, so dafs die Einfallsebene in den Hauptschnitt fällt, dann ist

$$\operatorname{tang} w'' = 0,$$

$$\cos\vartheta'' = \frac{\pi^2 \cos\varphi'' - (\pi^2 - \mu^2)\,C\,(C\cos\varphi'' + A\sin\varphi'')}{\sqrt{[\pi^4 - (\pi^4 - \mu^4)(C\cos\varphi'' + A\sin\varphi'')^2]}},$$

$$\operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\mu^2 A\,(C\cos\varphi'' + A\sin\varphi'') - \pi^2\,C\,(A\cos\varphi'' - C\sin\varphi'')}{\mu^2 C\,(C\cos\varphi'' + A\sin\varphi'') + \pi^2\,A\,(A\cos\varphi'' - C\sin\varphi'')}.$$

3. Bekannter als die Gleichungen (5) und (6) sind die Formeln, welche Malus nach Huyghens Construction entwickelt hat. Er ging nämlich von dem Satze aus, dafs die Wellenform des ungewöhnlichen Strahls ein Revolutionsellipsoid um die Axe des Crystalls ist, wie wir selbst dies im vorigen §. (39) nachgewiesen haben. Bezeichnet dann Fig. 32. AB den Durchschnitt der brechenden Ebene mit der Einfallsebene, CD die Wellenebene des einfallenden Lichtes, das in C zuerst, in E zuletzt die brechende Ebene trifft, so construirt man um C nach der Lage der Axe das Revolutionsellipsoid mit den gehörigen Werthen für seinen Polarhalbmesser $= \mu$ und seinen Aequatorialhalbmesser $= \pi$, zu denen die Schnelligkeit des Lichtes in DE die Einheit ist, legt durch E senkrecht gegen die Einfallsebene eine tangirende Fläche an das Ellipsoid, und erhält durch den Berührungspunct F die Richtung des gebrochenen Strahles nach CF. Von der Richtigkeit dieser Construction wird man

sich leicht überzeugen, wenn man bedenkt, dafs die Wellenebene des gebrochenen Lichtes die gemeinsame tangirende Fläche zu allen zwischen C und E hinter einander entstehenden elliptischen Wellen sein mufs; in C ist eine derselben vollständig ausgezogen, in E ist sie eben gleich Null, also geht die tangirende Fläche von E aus an das Ellipsoid um C. So einfach auch diese Construction des Strahls ist, so würde uns doch die Herleitung der von Malus aufgestellten Formeln nach seiner Weise zu weit führen; ich will daher ein kürzeres Verfahren angeben. Dem zuvor gehe ein Theorem über die Ellipse. Wenn Fig. 33. $ABGH$ eine Ellipse darstellt, C ihren Mittelpunct, BC die halbe grofse Axe $= a$, AC die halbe kleine Axe $= b$, und man von einem Puncte F in der Verlängerung von CB eine Tangente an die Ellipse zieht, so ist, vorausgesetzt, dafs $ED = y$ senkrecht zu $DC = x$ steht,

$$DC : BC = BC : FC.$$

In der Ellipse hat man nämlich die Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - x^2\right),$$

woraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2 x}{b^2 y}$$

folgt; nach der Figur ist ebenfalls

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{FD},$$

daher erhält man durch Gleichstellung der beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$

$$y^2 \text{ oder } \frac{a^2}{b^2}(b^2 - x^2) = \frac{a^2}{b^2} x FD;$$

dies giebt $x(FD + x) = b^2$, wofür man auch $DC : BC = BC : FC$ schreiben kann. Da für conjugirte Durchmesser dieselbe Gleichung zwischen den zu den Durchmessern parallelen Coordinaten gilt, so hat auch in diesem Falle die vorstehende Proportion ihre Gültigkeit. — Es liege nun Fig. 34. die brechende Ebene in der Fläche der Zeichnung; um C sei das Ellipsoid construirt, dessen Durchschnitt mit der brechenden Ebene die Ellipse $ABGH$ giebt; denn jeder Durchschnitt eines Ellipsoids durch seinen Mittelpunct bildet eine Ellipse; NC sei die Normale in C (wo N in der Figur fehlt), PC gebe die Lage der Polaxe, MC der Aequatorialaxe; der Hauptschnitt gehe durch CPM, und ein darauf senkrechter Schnitt durch GCO, worin CA gleich dem Aequatorialradius des Ellipsoids $= \pi$ ist. Ferner schneide die Einfallsebene die brechende Ebene in CE und bilde mit CB den Winkel w; E gebe den letzten Punct an, in welchem das unter einem Winkel ϑ auffallende Licht die brechende Ebene trifft, dann geht die vorher erwähnte tangirende Fläche durch QEO und berührt das Ellipsoid in S. Man ziehe nun $CS = r$, nenne wie früher $\angle NCS = \vartheta''$ und den Winkel, welchen die Projection von CS auf die brechende Ebene mit CB einschliefst, $= w''$. Nach dieser den obigen Angaben entsprechenden Construction legen wir zuerst durch SC und CO einen Durchschnitt durch das Ellipsoid; dieser giebt eine Ellipse, deren grofse Axe in $GA = 2\pi$ liegt. Zieht man in ihm SD senkrecht auf GA, so bekommt man, weil SO das Ellipsoid in dem Durchschnitt SGA tangirt,

$$CD : CA = CA : CO.$$

In dieser Proportion ist $CA = \pi$, $CD = r \sin \vartheta'' \sin w''$, und $CO = \frac{CE}{\sin w} = \frac{1}{\sin \vartheta \sin w}$; setzt

man daher für r seinen Werth

$$r = \frac{\mu\pi}{\sqrt{\{\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)[C\cos\vartheta'' + A\sin\vartheta''\cos w'']^2\}}}$$

oder bezeichnet ihn der Kürze wegen mit $\frac{\mu\pi}{W}$, so findet man aus der obigen Proportion

$$\sin\vartheta\sin w = \frac{\mu^2\sin\vartheta''\sin w''}{\mu\pi W}. \qquad (7)$$

Zweitens legen wir durch SC und HQ einen Durchschnitt durch das Ellipsoid, ziehen in ihm FS lothrecht auf BC, und SG parallel mit dem zu BH conjugirten Durchmesser desselben. Nennt man dann den Neigungswinkel der Tangente an B zu BC im Hauptschnitt $= x$, im Schnitte HSB $= y$, und den Neigungswinkel beider Schnitte gegen einander $= \delta$, so findet man

$$\cos\delta = \frac{r\cos\vartheta''}{FS}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{(\pi^2 - \mu^2)A.C}{\mu^2C^2 + \pi^2A^2}, \qquad \operatorname{cotg} y = \operatorname{cotg} x \cos\delta$$

$$\text{oder} \quad \operatorname{cotg} y = \frac{(\pi^2 - \mu^2)A.C.r\cos\vartheta''}{FS(\mu^2C^2 + \pi^2A^2)}.$$

Es verhält sich aber nach dem vorgeschickten Theorem

$$CG : CB = CB : CQ;$$

hierin ist
$$CG = CF + FG = r\sin\vartheta''\cos w'' + FS\operatorname{cotg} y,$$

oder
$$CG = r\sin\vartheta''\cos w'' + \frac{(\pi^2 - \mu^2)A.C.r\cos\vartheta''}{\mu^2C^2 + \pi^2A^2},$$

$$CB = \frac{\mu\pi}{\sqrt{(\mu^2C^2 + \pi^2A^2)}},$$

$$CQ = \frac{1}{\sin\vartheta\cos w},$$

folglich erhält man

$$\sin\vartheta\cos w = \frac{(\mu^2C^2 + \pi^2A^2)\sin\vartheta''\cos w''}{\mu\pi W} + \frac{(\pi^2 - \mu^2)A.C.\cos\vartheta''}{\mu\pi W}. \qquad (8)$$

Die beiden Gleichungen (7) und (8) stimmen mit den von Malus gegebenen vollkommen überein, sofern man nur die von ihm gebrauchten Bezeichnungen statt der unsrigen einführt.

Soll umgekehrt ϑ'' und w'' durch ϑ und w bestimmt werden, so setze man der Kürze halber

$$\mu^2C^2 + \pi^2A^2 = \mathfrak{A}, \qquad \mu^2A^2 + \pi^2C^2 = \mathfrak{B}, \qquad (\pi^2 - \mu^2)A.C = \mathfrak{C},$$

dann wird

$$\operatorname{tang} w = \frac{\mu^2\operatorname{tang}\vartheta''\sin w''}{\mathfrak{A}\operatorname{tang}\vartheta''\cos w'' + \mathfrak{C}};$$

man nehme hierauf

$$X = \operatorname{tang}\vartheta''\cos w'' \qquad \text{und} \qquad Y = \operatorname{tang}\vartheta''\sin w'',$$

wodurch $\operatorname{tang}^2\vartheta'' = X^2 + Y^2$ und $\cos^2\vartheta'' = \frac{1}{1 + X^2 + Y^2}$ wird, so hat man

$$\operatorname{tang} w = \frac{\mu^2 Y}{\mathfrak{A}X + \mathfrak{C}}.$$

Quadrirt man die Gleichung (7) und bringt sie unter die Form

$$\pi^2\sin^2\vartheta\sin^2 w[\mu^2 + \mu^2\operatorname{tang}^2\vartheta'' + (\pi^2 - \mu^2)(C + A\operatorname{tang}\vartheta''\cos w'')^2 = \mu^2\operatorname{tang}^2\vartheta''\sin^2 w''],$$

so zieht man daraus durch Substitution der obigen Werthe

$$\pi^2\sin^2\vartheta\sin^2 w[\mathfrak{B} + \mathfrak{A}X^2 + 2\mathfrak{C}X + \mu^2Y^2] = \mu^2Y^2.$$

Da aber aus der Gleichung $\tang w = \frac{\mu^2 Y}{\mathfrak{A} X + \mathfrak{C}}$ für X der Werth $\frac{\mu^2 Y}{\mathfrak{A} \tang w} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}$ folgt, so wird

$$\pi^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 w \left[\mathfrak{B} + \frac{\mu^4 Y^2}{\tang^2 w} - \frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}} + \mu^2 Y^2\right] = \mu^2 Y^2;$$

setzt man hierin noch $\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}} = \frac{\mu^2 \pi^2}{\mathfrak{A}}$, so erhält man

$$\pi^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 w \left[\pi^2 + \frac{\mu^2 Y^2}{\tang^2 w} + \mathfrak{A} Y^2\right] = \mathfrak{A} Y^2,$$

welche Gleichung Y oder

$$\tang \vartheta'' \sin w'' = \frac{\pi \sin \vartheta \sin w}{\sqrt{[\mathfrak{A} - \pi^2 \sin^2 \vartheta (\mathfrak{A} \sin^2 w + \mu^2 \cos^2 w)]}} \qquad (9)$$

giebt. Substituirt man diesen Werth von Y in X, so folgt X oder

$$\tang \vartheta'' \cos w'' = \frac{\mu^2 \pi^2 \sin \vartheta \cos w}{\mathfrak{A} \sqrt{[\mathfrak{A} - \pi^2 \sin^2 \vartheta (\mathfrak{A} \sin^2 w + \mu^2 \cos^2 w)]}} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}. \qquad (10)$$

Die Uebereinstimmung dieser Formeln mit den oben unter (5) und (6) aufgestellten noch besonders darzulegen, scheint überflüssig zu sein. Wir wenden uns daher zur doppelten Brechung in zweiaxigen Medien, wo wenigstens der Regel nach kein Strahl dem Gesetze der gewöhnlichen Brechung folgt.

4. Die Formeln, welche die doppelte Brechung in zweiaxigen Crystallen bestimmen, sind im Allgemeinen zu complicirt, als dafs sie sich in einem Ausdrucke leicht darstellen liefsen; man verfahre daher bei der Berechnung auf folgende Weise. Kommt es erstens darauf an, die Richtung des Strahls, den wir bisher mit e bezeichneten, im Crystalle nachzuweisen, so sei Fig. 35. $EFBD$ die brechende Ebene, und ein Strahl falle nach der Einfallsebene EB unter einem Winkel φ in C ein. Um C als Mittelpunct construire man im Crystalle den elastischen Körper, die Axe π liege nach CP und in A und A' die beiden optischen Axen, unter welchem Namen man die Normalen der beiden kreisförmigen Durchschnitte versteht. Darauf errichte man in C senkrecht zur brechenden Ebene die Linie NC (N fehlt in der Figur), und nenne, um die Lage der brechenden Ebene zu bestimmen, $NA = V$, $NA' = V'$, den Winkel zwischen der Projection von AC auf die brechende Ebene und $EB = w$, endlich zwischen der Projection von $A'C$ und $EB = w'$. Bezeichnet man weiter die Neigung der ungewöhnlichen Wellenebene gegen die brechende Fläche mit φ'', wonach auch ihre Normale CR mit NC denselben Winkel φ'' einschliefst, setzt dazu $\angle RCA$ oder Bogen $RA = u$, und $RA' = u'$, so hat man die folgenden Gleichungen, um φ'' zu bestimmen,

$$\sin \varphi'' = e \sin \varphi, \qquad (a)$$

$$e^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2 \left(\frac{u + u'}{2}\right), \qquad (b)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \cos V \cos \varphi'' + \sin V \sin \varphi'' \cos w, \\ \cos u' &= \cos V' \cos \varphi'' + \sin V' \sin \varphi'' \cos w'. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

Man nehme zuerst annähernd $e = \frac{\pi + \mu}{2}$, berechne damit φ'' aus (a), substituire diesen Werth in die Gleichungen (c) und bestimme u und u'; mittelst dieser Winkel suche man abermals e^2 aus (b) und verfahre auf dieselbe Weise weiter, bis man eine hinreichend genaue Bestimmung von φ'' er-

halten hat. Hiernach halbirt man $\angle ARA'$ durch TR und entwickelt nach §. IX. (11) oder (13) $\angle TRA$ aus

$$\sin^2 TRA = \frac{\sin^2 n - \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'}$$

oder

$$\cos^2 TRA = \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \sin^2 n}{\sin u \sin u'};$$

berechnet $\angle NRA'$ aus $\sin NRA' = \frac{\sin V' \sin w'}{\sin u'}$, endlich $\angle TRN$ aus $\angle TRN = \angle NRA' - \angle TRA'$. Der ungewöhnliche Strahl geht aber nach CS, wo S in der Verlängerung von TR liegt, abstehend um den Bogen $RS = q''$, welcher durch

$$\tang q'' = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u+u'}{2}\right)\cos TRA}{e^2}$$

gegeben wird. Somit ist im $\triangle NRS$ alles bekannt, um die Neigung des Strahls gegen die Normale $CN = \vartheta''$ und sein Azimuth gegen die Einfallsebene $= w''$ zu berechnen. — Der Gang des gewöhnlichen Strahls o läfst sich auf ganz ähnliche Art finden; ich übergehe daher das Weitere und bemerke nur des Folgenden wegen, dafs alle Zeichen, die sich auf ihn beziehen, oben mit einem Striche versehen werden sollen.

In einigen Fällen kann man die Richtung der Strahlen auf einfachere Weise angeben, namentlich in folgenden vier Fällen:

a) Die Einfallsebene geht durch den Pol P oder halbirt den spitzen Winkel zwischen den optischen Axen; siehe Fig. 36., in welcher N den Endpunct der Normale NC bezeichnet. Wir haben hier

$$u = u', \qquad \text{also} \qquad o^2 = \mu^2, \qquad \tang q' = 0, \qquad \sin\varphi' = \mu \sin\varphi,$$

das heifst, der Strahl o folgt den Gesetzen der gewöhnlichen Brechung. — Für den ungewöhnlichen Strahl sei $NR = \varphi''$, $NP = \delta$, $PR = \pm(\varphi'' - \delta)$, wo das obere Zeichen gilt, wenn P innerhalb RN, das untere, wenn R innerhalb PN liegt. S bezeichnet den Strahl, der von R aus abwärts von P kommt, sofern π einen gröfsern Werth als ν und μ besitzt, wie wir bisher immer angenommen haben. Man hat nun

$$\cos u = \cos(\varphi'' - \delta)\cos n,$$

$$e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2 n \cos^2(\varphi'' - \delta) = \pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta),$$

also

$$\sin^2\varphi'' = [\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta)]\sin^2\varphi;$$

ferner

$$\tang RS = \tang q'' = \pm\frac{(\pi^2 - \nu^2)\sin(\varphi'' - \delta)\cos(\varphi'' - \delta)}{\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta)}$$

und somit

$$\tang NS = \tang\vartheta'' = \frac{\pi^2 \tang\varphi'' - (\pi^2 - \nu^2)\cos(\varphi'' - \delta)[\tang\varphi''\cos(\varphi'' - \delta) - \sin(\varphi'' - \delta)]}{\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos(\varphi'' - \delta)[\cos(\varphi'' - \delta) + \tang\varphi''\sin(\varphi'' - \delta)]},$$

oder

$$= \frac{\pi^2 \sin\varphi'' - (\pi^2 - \nu^2)\cos(\varphi'' - \delta)\sin\delta}{\pi^2 \cos\varphi'' - (\pi^2 - \nu^2)\cos(\varphi'' - \delta)\cos\delta}.$$

Setzt man $\delta = o$ oder steht die Axe π senkrecht gegen die brechende Fläche, so wird

$$\operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\pi^2 \operatorname{tang}\varphi''}{\nu^2},$$

wo $\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2\varphi'']$ ist.

Setzt man $\delta = 90^\circ$, in welchem Falle die Axe π in der brechenden Ebene liegt, so wird

$$\operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\nu^2 \operatorname{tang}\varphi''}{\pi^2},$$

wo $\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi'']$ ist.

b) Die Einfallsebene geht durch den Pol M oder halbirt den stumpfen Winkel zwischen den optischen Axen, also den Winkel Aa'. Jetzt ist e constant $= \pi$ und $\sin\varphi'' = \pi\sin\varphi$, d. h. der ungewöhnliche Strahl folgt den Gesetzen der gewöhnlichen Brechung. — Zur Bestimmung des gewöhnlichen Strahls sei Fig. 37. $NM = \delta$, $NR = \varphi'$ und $NR = \pm(\varphi' - \delta)$, wo die doppelten Zeichen die unter *a*) gegebene Bedeutung haben. Der Strahl liegt von R ab der Axe μ zu. Nun ist

$$\cos RA = \cos(\varphi' - \delta)\sin n,$$

$$o^2 = \mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2 n\cos^2(\varphi' - \delta) = \mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta),$$

und

$$\sin^2\varphi' = \sin^2\varphi\,[\mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta)].$$

Ferner ist

$$\operatorname{tang} RS = \operatorname{tang} q' = \pm\frac{(\nu^2 - \mu^2)\sin(\varphi' - \delta)\cos(\varphi' - \delta)}{\mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta)},$$

daher erhält man

$$\operatorname{tang} NS = \operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\mu^2\operatorname{tang}\varphi' + (\nu^2 - \mu^2)\cos(\varphi' - \delta)[\operatorname{tang}\varphi'\cos(\varphi' - \delta) - \sin(\varphi' - \delta)]}{\mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\cos(\varphi' - \delta)[\cos(\varphi' - \delta) + \operatorname{tang}\varphi'\sin(\varphi' - \delta)]}$$

oder

$$= \frac{\mu^2\sin\varphi' + (\nu^2 - \mu^2)\cos(\varphi' - \delta)\sin\delta}{\mu^2\cos\varphi' + (\nu^2 - \mu^2)\cos(\varphi' - \delta)\cos\delta}.$$

Bei $\delta = o$ wird

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\mu^2\operatorname{tang}\varphi'}{\nu^2} \quad\text{und}\quad \sin^2\varphi' = \sin^2\varphi\,[\mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\cos^2\varphi'];$$

bei $\delta = 90^\circ$ wird

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\nu^2\operatorname{tang}\varphi'}{\mu^2} \quad\text{und}\quad \sin^2\varphi' = \sin^2\varphi\,[\mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\sin^2\varphi'].$$

c) Im dritten Falle liege die Einfallsebene in der Ebene der optischen Axen; wir müssen hier wieder zwei Fälle unterscheiden.

α. Die Normale R liege aufserhalb AA', siehe Fig. 38. Der gewöhnliche Strahl folgt den Gesetzen der gewöhnlichen Brechung; es ist

$$o^2 = \nu^2 \quad\text{und}\quad \sin\varphi' = \nu\sin\varphi.$$

In Bezug auf den ungewöhnlichen Strahl sei $NP = \delta$, $NR = \varphi''$, so findet man

$$\frac{u + u'}{2} = \pm(\varphi'' - \delta), \qquad \frac{u - u'}{2} = n,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn P innerhalb RN, das untere, wenn R innerhalb PN liegt. Somit ist

$$e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta),$$
$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta)],$$
$$\operatorname{tang} q'' = \pm\frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin(\varphi'' - \delta)\cos(\varphi'' - \delta)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta)},$$

und

$$\operatorname{tang} NS = \operatorname{tang}\vartheta'' = \frac{\pi^2 \sin\varphi'' - (\pi^2 - \mu^2)\cos(\varphi'' - \delta)\sin\delta}{\pi^2\cos\varphi'' - (\pi^2 - \mu^2)\cos(\varphi'' - \delta)\cos\delta}.$$

β. Die Normale R liege innerhalb AA' wie in Fig. 39. Jetzt folgt der ungewöhnliche Strahl den Gesetzen der gewöhnlichen Brechung, es ist nämlich $e^2 = \nu^2$ und $\sin\varphi'' = \nu\sin\varphi$.

Zur Bestimmung des gewöhnlichen Strahls sei $PN = \delta$, $RN = \varphi'$, dann ist

$$\frac{u + u'}{2} = n \quad \text{und} \quad \frac{u - u'}{2} = \pm(\varphi' - \delta),$$

wo die doppelten Zeichen dieselbe Bedeutung wie vorhin haben. Hiernach wird

$$o^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta),$$
$$\sin^2\varphi' = \sin^2\varphi\,[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta)],$$
$$\operatorname{tang} q' = \pm\frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin(\varphi' - \delta)\cos(\varphi' - \delta)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta)},$$

und

$$\operatorname{tang} NS = \operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\pi^2 \sin\varphi' - (\pi^2 - \mu^2)\cos(\varphi' - \delta)\sin\delta}{\pi^2\cos\varphi' - (\pi^2 - \mu^2)\cos(\varphi' - \delta)\cos\delta}.$$

d) Ein besonderer Fall tritt ein, wenn das einfallende Licht grade so gebrochen wird, daſs es längs einer der beiden optischen Axen entlang geht; denn da hier $e = o = \nu$ ist, so kann sich das Licht nicht in zwei Strahlen trennen, sondern geht mit gleicher Schnelligkeit und unpolarisirt durch den Crystall hindurch. Wir hätten also hier den Fall einer Brechung ganz wie in einem gleichförmig elastischen Medium, wenn es anders sich gleich bliebe, nach welcher Richtung das so gebrochene Licht in seiner Wellenebene schwänge; allein in dieser Beziehung finden wir, daſs je nach der Schwingungsrichtung eine gröſsere oder geringere Ablenkung der Strahlen von der optischen Axe eintritt. Setzen wir nämlich, daſs ein einzelner Lichtstrahl nach einer Richtung schwingt, welche mit der Ebene der optischen Axen den Winkel w bildet, so folgt für ihn, weil $u' = o$ und $u = 2n$ ist, der Ablenkungswinkel q aus

$$\operatorname{tang} q = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin n \cos n \cos w}{\nu^2}$$

$$\text{oder} \quad \operatorname{tang} q = \frac{\sqrt{[(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)]}}{2\nu^2}\cos w.$$

Da diese Abweichung bei allen Strahlen von der Axe π abwärts erfolgt, so schlieſsen sie zusammen einen Kegel ein, welcher sich an die optische Axe anlehnt. Um die Art des Kegels deutlicher zu machen, stelle die Fig. 40. eine Wellenebene des Kegels dar, welche um D von der brechenden Ebene oder von der Spitze des Kegels absteht. A sei der Punct der optischen Axe, AA' die Ebene der beiden optischen Axen, und der Kreis um C wird die Basis des Strahlenkegels sein, der mit einem Radius $CA = D\dfrac{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}}{4\nu^2}$ gebildet ist. Im Azimuth $w = o$ nämlich ist die Tangente der Neigung des Strahls gegen die optische Axe $= \dfrac{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}}{2\nu^2}$, die mit D

multiplicirt den Durchmesser AM giebt; in einem anderen beliebigen Azimuth $w = MAE$ ist die Tangente der Neigung des Strahls gegen die optische Axe $= \frac{\sqrt{(\pi^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)}}{2\nu^2} \cos w$, also sein Abstand von $A = AM \cos w$, welches im Kreise mit AE übereinstimmt. — Diese eigenthümliche Art der Brechung führt den Namen der conischen Brechung.

§. XII.

Ueber die Polarisationsrichtung des gewöhnlich und des ungewöhnlich gebrochenen Strahls.

Wenn die Aufgabe, die Richtung und die Schwingungsweise der beiden Strahlen in einem ungleich elastischen Medium zu bestimmen, in der Undulationstheorie isolirt stände, wenn sich namentlich an diese Untersuchungen nicht die Frage über die Reflexion des Lichtes von Crystallflächen anschlösse, die in neuerer Zeit von Neumann so vollständig beantwortet worden ist, so würden die oben gefundenen Resultate vollkommen genügen; möchten wir dann mit Fresnel annehmen, dafs die Polarisationsebenen der Strahlen senkrecht gegen ihre Schwingungsrichtungen ständen, oder parallel zu ihnen lägen, wie Neumann fordert, es würde sich nur um einen Wortstreit handeln, den man nach Gefallen beilegen könnte, oder den man, um dem Entwicklungsgange der Optik zu folgen, lieber für Fresnel entscheiden würde. Allein wie jetzt die Sachen stehen, ist ein so leichtes Abkommen nicht mehr möglich. Nach der Theorie nämlich, die Neumann über die Reflexion von Crystallflächen aufgestellt und die er, wie §. XIV. und §. XV. zeigen werden, auf eine Weise durchgeführt hat, dafs man schwerlich an die Richtigkeit derselben zweifeln kann (ich wenigstens würde eine Aenderung der Resultate eher an einer andern Stelle suchen), wird die Voraussetzung gemacht, dafs erstens bei veränderlicher Elasticität die Dichtigkeit des Aethers in allen Medien constant bleibt, und zweitens, dafs der von uns mit e bezeichnete Strahl senkrecht gegen die Richtung e, und der mit o bezeichnete senkrecht gegen die Richtung o seine Schwingungen ausführt. Der erstern Annahme hätten wir in dem §. X. gegebenen Gange leicht nachkommen können, wenn wir die Vertheilung der Theilchen in dem Medium gleich gesetzt und allein die Elasticitätskraft nach den Richtungen π, ν, μ als ungleich beibehalten hätten. Die Rechnung würde nur dadurch von der gegebenen abgewichen sein, dafs sich in den beiden Gleichungen §. X. (9) die mit $\cos\alpha \cos\beta$, u. s. w. behafteten Glieder unmittelbar aufgehoben hätten, ohne dafs dazu die Verlegung der Schwingungsrichtungen nach e und o erforderlich gewesen wäre. Soweit also, als die Forderung auf eine gleiche Dichtigkeit des Aethers geht, hätten wir bei einer entsprechenden Annahme keine Aenderung in den gefundenen Resultaten erfahren. Aber bei dieser Annahme bleibt noch immer die Folge, dafs der mit e bezeichnete Strahl nach e, der mit o bezeichnete nach o, nicht senkrecht gegen diese Richtungen schwingt. Nun hat freilich auch Neumann diese letztere Schwingungsweise aus den Gesetzen der Mechanik nachgewiesen, sein Verfahren ist mir jedoch nicht in der Art einleuchtend geworden, dafs ich den oben gewählten Gang hätte aufgeben können. Deshalb bedarf dieser Theil nach meinen Angaben noch einer besondern Revision; für jetzt mache ich mir den Hergang auf folgende Weise deutlich. Ist der Aether

in allen Medien gleich dicht und besitzt er dennoch ungleiche Elasticität, so kann dies nur daher rühren, dafs die Körpertheilchen der Medien durch ihre Lage gegen einander, ob sie nämlich sich näher oder ferner stehen, ob sie so oder anders verbunden sind, diese ungleiche Elasticität bewirken. Dies ist auch, wie ich glaube, durch den von Fresnel zuerst angestellten Versuch erwiesen, wonach gewöhnliches Glas, wenn es nach einer Richtung hin comprimirt wird, die Natur eines ungleich elastischen Mediums annimmt. Sind es aber die Körpertheilchen selbst, welche die ungleiche Elasticität des Aethers bewirken und sie grade dann hervortreten lassen, wenn der Aether in die Lichtschwingungen versetzt wird, so ist wohl nicht leicht ein anderer Fall denkbar, als dafs bei den Lichtschwingungen auch die Körpertheilchen in Schwingungen gerathen und dafs in dem Maafse, als die letztern wegen ungleicher Dichtigkeit leichter oder schwerer schwingen, auch die Lichtschwingungen schneller oder langsamer von statten gehen. Wenn wir dies annehmen, so hängen die Lichtschwingungen von den Schwingungen der Körpertheilchen ab, und was wir oben in §. X. untersucht haben, waren die letztern Schwingungen, zu denen senkrecht in derselben Ebene die Schwingungen des Aethers erfolgen, die sich grade nach der Richtung als Lichtstrahlen fortpflanzen, welche durch die Schwingungen der Körpertheilchen bedingt wird. In dieser Voraussetzung habe ich keinen Anstand genommen, bei den obigen Untersuchungen eine ungleiche Dichtigkeit und damit in Verbindung die nach den Axen π, ν, μ ungleich wirkende Elasticitätskraft vorauszusetzen, weil mich die andere Annahme von gleicher Dichtigkeit doch nicht zum Ziele geführt hätte, und die gewählte eine gröfsere Anschaulichkeit in sich trägt. Uebrigens bescheide ich mich gern, wenn die von mir zu Hülfe genommene Hypothese nicht genügend erscheinen sollte; mir selbst würde es angenehm gewesen sein, wenn ich aus der ungleichen Elasticität des Aethers seine Schwingungen nach den verlangten Richtungen hätte ableiten können; allein lieber wollte ich das offene Bekenntnifs von der für mich noch nicht vorhandenen Uebereinstimmung zweier wichtigen Abschnitte in der Undulationstheorie ablegen, als eine Lücke verdecken, die sicher durch neue Untersuchungen befriedigend ausgefüllt wird. Des Folgenden wegen nehme ich jedoch von hier ab die Schwingungsrichtung des ungewöhnlichen Strahls senkrecht gegen e, des gewöhnlichen senkrecht gegen o, oder mit andern Worten den ungewöhnlichen Strahl senkrecht gegen e, den gewöhnlichen senkrecht gegen o polarisirt an.

§. XIII.

Die Farbenzerstreuung in ungleich elastischen Medien.

In §. X. fanden wir allgemein für einen beliebigen Farbestrahl

$$\Omega_e = \frac{s}{k} \qquad \text{und} \qquad \Omega_o = \frac{s}{k'},$$

worin Ω_e und Ω_o die Schnelligkeit der mit e und o bezeichneten Strahlen bedeuten, und $s = \frac{2\pi}{T}$, $k = \frac{2\pi}{l}$, $k' = \frac{2\pi}{l'}$ ist, nämlich s der Schwingungsdauer und k, k' der Wellenlänge umgekehrt proportional. Für s hatten wir aufserdem in den Gleichungen (20) die Werthe

$$s^2 = e^2 S \left\{ 2m \frac{f(r) + \cos^2 \alpha \mathfrak{F}(r)}{r} \sin^2 \frac{k \Delta z}{2} \right\},$$

und ebenfalls

$$s^2 = o^2 S\left\{2m\frac{f(r)+\cos^2\beta\mathfrak{F}(r)}{r}\sin^2\frac{k'\Delta'z}{2}\right\}.$$

Da in diesen Gleichungen für einen bestimmten Farbestrahl k und k' constant sind, so lassen sich die zweiten Theile nach den Potenzen von k und k' entwickeln, und so auch die Werthe von $\frac{s}{k}$ und $\frac{s}{k'}$ nach den Potenzen von s bestimmen, in welcher Gröfse die Schwingungsdauer T, als der Wellenlänge des Strahls im luftleeren Raume proportional, durch alle Medien dieselbe bleibt. Bedient man sich allgemeiner Gröfsen, so findet man nach demselben Gange wie §. IV. bei gleichförmig elastischen Medien

$$\Omega_e = \mathfrak{a}_e + \mathfrak{b}_e s^2 + \mathfrak{c}_e s^4 + \ldots,$$

und

$$\Omega_o = \mathfrak{a}_o + \mathfrak{b}_o s^2 + \mathfrak{c}_o s^4 + \ldots, \quad (1)$$

oder

$$\frac{1}{\Omega_e} = \mathfrak{A}_e + \frac{\mathfrak{B}_e}{\lambda^2} + \frac{\mathfrak{C}_e}{\lambda^4} + \frac{\mathfrak{D}_e}{\lambda^6} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\Omega_o} = \mathfrak{A}_o + \frac{\mathfrak{B}_o}{\lambda_2} + \frac{\mathfrak{C}_o}{\lambda^4} + \frac{\mathfrak{D}_o}{\lambda^6} + \ldots, \quad (2)$$

Die wichtigste Aufgabe, welche jetzt für ungleich elastische Medien zu lösen wäre, besteht offenbar darin, die Verbindung zwischen den Gröfsen $\mathfrak{A}_e$ und $\mathfrak{A}_o$, $\mathfrak{B}_e$ und $\mathfrak{B}_o$ u. s. f. in der Art nachzuweisen, dafs man die Zerstreuung der ungewöhnlichen Strahlen nach allen ihren Richtungen durch den Crystall und ebenso die Zerstreuung der gewöhnlichen Strahlen aus einer Messung allein herleiten könnte. Allein diese Aufgabe ist bis jetzt nicht gelöst, und es scheint auch, als wenn vor der mathematischen Untersuchung noch mehere Messungen für verschiedene Durchgangsrichtungen der Strahlen durch die ungleich elastischen Medien ausgeführt werden müfsten. Unter diesen Umständen will ich nur, wie früher, Rudbergs Messungen berechnen, welche die Zerstreuung der Strahlen bei ihren Schwingungen nach den Elasticitätsaxen geben, und dabei wie bei der Zerstreuung in gleichförmig elastischen Medien auf die drei ersten Glieder in den Gleichungen (2) allein Rücksicht nehmen. Da diese Berechnung von der frühern nicht abweicht, so scheint mir auch keine weitere Erläuterung nöthig zu sein. —

Doch wegen einiger frühern Angaben mufs ich hier noch zwei Bemerkungen hinzufügen. Erstens wurde §. X. (23) und (24) $\Omega_e = e$ und $\Omega_o = o$ gesetzt, indem abgesehen von der Farbenzerstreuung der dort befindliche Factor

$$\sqrt{S\left\{m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\mathfrak{F}(r)}{r}\left[\frac{(\Delta z)^2}{2} - \frac{k^2(\Delta z)^4}{8.3} + \ldots\right]\right\}},$$

und ebenso der Factor

$$\sqrt{S\left\{m\frac{f(r)+\cos^2\alpha\mathfrak{F}(r)}{r}\left[\frac{(\Delta' z)^2}{2} - \frac{k'^2(\Delta' z)^4}{8.3} + \ldots\right]\right\}}$$

gleich **1** sein sollte. Es verhält sich hiermit folgendermaafsen. Berechnet man die Zerstreuung der Farbestrahlen nach (1), so setzt man, um nur auf eine der Gleichungen zu achten, für Ω_e successive die durch die Messungen gefundene Schnelligkeit der verschiedenen Farbestrahlen und für s successive die denselben Farbestrahlen entsprechenden besonderen Werthe; man bildet auf diese Weise sieben Gleichungen und weiset in der Berechnung nach, dafs in allen $\mathfrak{a}_e$, $\mathfrak{b}_e$ u. s. w. constante Gröfsen sind. Bringt man aber die Gleichung (1) unter die Form

$$\Omega_e = e(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 s^2 + \mathfrak{c}_1 s^4 + \ldots), \quad (3)$$

indem man $e\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_e$ u. s. w. setzt, so ist die Summe der Glieder

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 s^2 + \mathfrak{c}_1 s^4 + \ldots$$

gleich der oben unter dem Wurzelzeichen enthaltenen Gröfse. Schwingt jetzt das Licht nach der Axe π (im Sinne von §. X.), so wird $e = \pi$, und gleichfalls setzt man bei der Berechnung für Ω_e den Werth von π; schwingt das Licht nach der Axe μ, so wird $e = \mu$, und bei der Berechnung setzt man ebenfalls $\Omega_e = \mu$. Man nimmt also wenigstens in diesen Lagen an, dafs der Factor $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 s^2 + \mathfrak{c}_1 s^4 + \ldots = 1$ ist; demnach scheint es natürlich ihn für alle Werthe zwischen π und μ gleich 1 zu setzen, und die Veränderung der Schnelligkeit allein von e abhängen zu lassen. Sieht man noch von der Farbenzerstreuung ab, so liegen in π und μ die mittleren, dem weifsen Lichte zukommenden Werthe, und der Factor bleibt auch hier gleich 1. — Zweitens habe ich noch, um keine Irrung zu veranlassen, auf eine Ungleichheit aufmerksam zu machen, die nach meinen Bezeichnungen zwischen den Formeln für die Lichtschnelligkeit in ungleich elastischen und in gleichmäfsig elastischen Medien statt findet. Die ersten Formeln haben nämlich bei übrigens gleichen Gliedern den Factor e oder o, der in den andern fehlt, und für welchen man offenbar einen constanten Factor verlangen wird, der das Verhältnifs der Lichtschnelligkeit in dem untersuchten Medium zu der Schnelligkeit im luftleeren Raume ausdrückt. Diese nicht zu verkennende Ungleichheit ist dadurch entstanden, dafs früher in dem gleichmäfsig elastischen Medium die gegenseitige Wirkung zweier Theilchen $\mathfrak{m}$ und m auf einander schlechthin $= \mathfrak{m}\, m f(r)$ gesetzt wurde, während sie nach Analogie der folgenden Untersuchungen $= \nu^2 \mathfrak{m}\, m f(r)$ hätte sein sollen, sofern nämlich ν^2 die constante Elasticitätskraft des Mediums gegen den luftleeren Raum bezeichnet. Aber diese Aenderung übt keinen andern Einflufs auf die Resultate, als dafs auch in den obigen Formeln der constante Factor ν statt des spätern veränderlichen e oder o auftritt.

Nach diesen Bemerkungen gebe ich in der folgenden Tabelle Rudbergs Messungen über die Zerstreuung der sieben Fraunhoferschen Strahlen in meheren ein- und zweiaxigen Medien nebst meiner Berechnung. Die summarische Bezeichnung Elasticitätsaxe π, ν, μ giebt an, von welcher der Axen die Schnelligkeit der Strahlen abhängig ist; zugleich ist die gemessene Schnelligkeit Ω das Maafs für die Axen selbst, welche also je nach den Farbestrahlen verschiedene Werthe erlangen.

Kalkspath.

	Elasticitätsaxe π.		Elasticitätsaxe μ.	
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,48391	1,48391	1,65308	1,65308
C	1,48455	1,48457	1,65452	1,65453
D	1,48635	1,48636	1,65850	1,65849
E	1,48868	1,48868	1,66360	1,66360
F	1,49075	1,49075	1,66802	1,66809
G	1,49453	1,49447	1,67617	1,67613
H	1,49780	1,49780	1,68330	1,68330
	$\mathfrak{A} = 1{,}477192$		$\mathfrak{A} = 1{,}638044$	

Quarz.

	Elasticitätsaxe π.		Elasticitätsaxe μ.	
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,54990	1,54990	1,54090	1,54090
C	1,55085	1,55080	1,54181	1,54177
D	1,55328	1,55322	1,54418	1,54412
E	1,55631	1,55631	1,54711	1,54711
F	1,55894	1,55898	1,54965	1,54970
G	1,56365	1,56366	1,55425	1,55423
H	1,56772	1,56772	1,55817	1,55817
	$\mathfrak{A}$ = 1,540348		$\mathfrak{A}$ = 1,531683	

Arragonit.

	Elasticitätsaxe π.		Elasticitätsaxe ν.		Elasticitätsaxe μ.	
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,52749	1,52749	1,67631	1,67631	1,68061	1,68061
C	1,52820	1,52820	1,67779	1,67779	1,68203	1,68202
D	1,53013	1,53014	1,68157	1,68147	1,68589	1,68587
E	1,53264	1,53264	1,68634	1,68634	1,69084	1,69084
F	1,53479	1,53483	1,69053	1,69062	1,69515	1,69522
G	1,53882	1,53874	1,69836	1,69828	1,70318	1,70308
H	1,54226	1,54226	1,70509	1,70509	1,71011	1,71011
	$\mathfrak{A}$ = 1,520087		$\mathfrak{A}$ = 1,661952		$\mathfrak{A}$ = 1,666054	

Topas.

	Elasticitätsaxe π.		Elasticitätsaxe ν.		Elasticitätsaxe μ.	
	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.	$\frac{1}{\Omega}$ beob.	berechn.
B	1,61791	1,61791	1,61049	1,61049	1,60840	1,60840
C	1,61880	1,61876	1,61144	1,61136	1,60935	1,60927
D	1,62109	1,62110	1,61375	1,61371	1,61161	1,61159
E	1,62408	1,62408	1,61668	1,61668	1,61452	1,61452
F	1,62652	1,62664	1,61914	1,61923	1,61701	1,61709
G	1,63123	1,63114	1,62365	1,62366	1,62154	1,62155
H	1,63506	1,63506	1,62745	1,62745	1,62539	1,62539
	$\mathfrak{A}$ = 1,608743		$\mathfrak{A}$ = 1,601146		$\mathfrak{A}$ = 1,599298	

§. XIV.
Ueber den Einflufs der Oberflächen einaxiger Crystalle auf das reflectirte und gebrochene Licht.

1. Indem wir uns jetzt zur Untersuchung derjenigen Modificationen wenden, welche das Licht noch aufser der doppelten Brechung bei seinem Uebergange von gleichmäfsig elastischen Medien in Crystalle und umgekehrt erfährt, wollen wir die Aufgabe trennen, und zuerst die Wirkung der einaxigen, dann im folgenden §. die Wirkung der zweiaxigen Crystalle ermitteln. Die Grundgesetze, welche überhaupt die Intensität und die Schwingungsweise des reflectirten und gebrochenen Lichtes bedingen, sind früher §. V. auseinander gesetzt worden; es wird genügen, hier in Kürze daran zu erinnern. Das einfallende Licht kann man stets in zwei Bündel zerlegen, welche beide senkrecht zu einander in der einfallenden Wellenebene schwingen, der eine parallel mit der Einfallsebene, der andere senkrecht dazu, also parallel mit der brechenden Fläche; ebenso kann das reflectirte und gebrochene Licht, jedes in seiner Wellenebene, nach den beiden genannten Richtungen getrennt werden. Als Bedingung für die verschiedenen Strahlen gilt nun, dafs die Schwingungsweite des einfallenden Lichtes nach jeder Richtung der Summe der Schwingungsweiten im reflectirten und gebrochenen Lichte gleich ist. Zerlegt man daher die zur Einfallsebene parallel gehenden Schwingungen in sämmtlichen Strahlen einmal senkrecht zur brechenden Fläche; dann parallel zu derselben, so mufs nach beiden Richtungen die Schwingungsweite des einfallenden Lichtes gleich der reflectirten und gebrochenen Schwingungsweite sein; ebenso mufs die zur Einfallsebene senkrechte Schwingungsweite des einfallenden Lichtes gleich den entsprechenden Schwingungsweiten des reflectirten und gebrochenen Lichtes sein. Diese Annahme liefert drei Bedingungsgleichungen zwischen den verschiedenen Strahlen; die vierte giebt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, wonach die Intensität des einfallenden Lichtes gleich der Intensität der reflectirten und gebrochenen Strahlen zusammen ist. — Suchen wir zuerst diese vier Gleichungen, wenn gewöhnliches Licht auf die Fläche eines einaxigen Crystalls fällt, und theils reflectirt, theils in zwei Strahlen gebrochen wird. Es sei hierzu φ die Neigung der einfallenden und reflectirten Wellenebene gegen die Oberfläche des Crystalles, φ' die Neigung der Wellenebene des gewöhnlich, φ'' des ungewöhnlich gebrochenen Strahls. Ferner sei die zur Einfallsebene parallele Schwingungsweite des einfallenden Lichtes in ihrem Maximum $= S$, die dazu senkrechte $= P$; im reflectirten Lichte seien dieselben Schwingungsweiten $= R_s$ und R_p; die Schwingungsweiten des gewöhnlichen Strahls setze man $= D'$, des ungewöhnlichen $= D''$, und nehme an, dafs die Schwingung des erstern unter einem Winkel x', des andern unter einem Winkel x'' gegen die Einfallsebene erfolge, so erhält man, wenn man aufserdem die von den einfallenden, reflectirten, gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen in gleicher Zeit erregten Massen des Aethers M, m, m', m'' nennt, die folgenden vier Gleichungen, in denen wegen der Zeichen bei R_s und R_p noch die Bestimmungen in §. V. nachzusehen sind:

$$\left.\begin{aligned}(S+R_s)\sin\varphi &= D'\cos x'\sin\varphi' + D''\cos x''\sin\varphi'',\\ (S-R_s)\cos\varphi &= D'\cos x'\cos\varphi' + D''\cos x''\cos\pi'',\\ P+R_p &= D'\sin x' + D''\sin x'',\\ (S^2+P^2)M &= (R_s^2+R_p^2)m + D'^2 m' + D''^2 m''.\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Diese 4 Gleichungen, in welchen S und P bekannt sind, reichen hin, um die 4 unbekannten Gröfsen R_s, R_p D' und D'' zu bestimmen. Wir wollen zunächst in ihnen die Werthe der Winkel x' und x'' ermitteln. Hierzu bezeichne (Fig. 41.) N die Normale auf der brechenden Fläche, P und M die Axen π und μ des Crystalls, MNP den Hauptschnitt, $ENRF$ die einfallende Ebene, und R gebe die Lage der Normale zur ungewöhnlichen Wellenebene an; dann ist nach den frühern Ausdrücken $NR = \varphi''$; $PR = \gamma''$, $\angle PNR = w$, das Azimuth der Einfallsebene gegen den Hauptschnitt, und der ungewöhnlich gebrochene Strahl schwingt senkrecht gegen PRS nach RG; folglich ist $\angle GRF = x''$. Es verhält sich aber im $\triangle PRN$

$$\sin PRN : \sin w = \sin NP : \sin NR$$

woraus

$$\cos x'' = \frac{A \sin w}{\sqrt{(1-\gamma''^2)}}, \quad (2)$$

folgt, wenn auch hier $\sin NP$ wie früher $= A$ gesetzt wird. Demnach ist mit Rücksicht auf: $\gamma'' = C \cos \varphi'' + A \sin \varphi'' \cos w$,

$$\sin x'' = \frac{C \sin \varphi'' - A \cos \varphi'' \cos w}{\sqrt{(1-\gamma''^2)}}. \quad (3)$$

Der gewöhnliche Strahl schwingt längs RS; bezeichnet daher jetzt R die Normale zu der gewöhnlich gebrochenen Wellenebene, so ist $\angle SRF = x'$, und man erhält:

$$\gamma' = C \cos \varphi' + A \sin \varphi' \cos w,$$

$$\cos x' = \frac{C \sin \varphi' - A \cos \varphi' \cos w}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}}, \quad (4)$$

$$\sin x' = \frac{A \sin w}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}}. \quad (5)$$

Wie man leicht sieht, sind von den Schwingungen der beiden gebrochenen Strahlen, wenn sie nach RF, d. i. nach der Einfallsebene und senkrecht dazu zerlegt werden, zwei mit einander gleichlaufend, zwei einander entgegengesetzt; denn fällt der gewöhnliche und der ungewöhnliche Strahl auf die Einfallsebene zerlegt nach der Richtung RF, so liegen von denselben Strahlen, wenn sie senkrecht gegen RF zerlegt werden, der eine nach der rechten, der andere nach der linken Seite; oder liegen umgekehrt die letztern Componenten nach derselben Seite hin, so kommen die nach RF zerlegten Strahlen in entgegengesetzte Lage gegen einander. Daher müssen die Zeichen entweder von $\cos x'$ und $\cos x''$ oder von $\sin x'$ und $\sin x''$ einander entgegengesetzt sein. Wir wollen als Normalform die Lage der Strahlen nach RG und RP nach unsrer Figur annehmen, und demnach sogleich in den obigen Gleichungen $\cos x'$ mit $-\cos x'$ vertauschen. — Was zweitens die von den verschiedenen Wellen in gleicher Zeit erregten Massen des Aethers betrifft, so sind sie alle von gleicher Breite, welche Breite nämlich senkrecht gegen die Einfallsebene genommen wird; ihre Tiefen entsprechen der Bewegungsschnelligkeit der Wellenebenen und verhalten sich daher wie $\sin \varphi : \sin \varphi' : \sin \varphi''$; ihre Längen endlich stehen im Verhältnifs von $\cos \varphi : \cos \varphi' : \cos \varphi'' - \sin \varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$, wo $\operatorname{tang} q''$ in der frühern Bedeutung genommen ist. Die letzte Angabe fordert eine nähere Erklärung. Nimmt man den Abstand der beiden Puncte in der brechenden Ebene, auf welche in der Richtung der Einfallsebene das Licht zuerst und zuletzt trifft, als Einheit an, so erhält man die Länge der einfallenden, der reflectirten und der gewöhnlich gebrochenen Wellenebene ohne weitere Schwierigkeit

$= \cos\varphi, \cos\varphi, \cos\varphi'$; der ungewöhnliche Strahl dagegen geht nicht senkrecht zu seiner Wellenebene fort, sondern bildet mit der zu ihr Normalen den Winkel q''; dies giebt nach einem Fortrücken der Welle um $\sin\varphi''$ einen Abstand $= \sin\varphi'' \operatorname{tang} q''$ in der Richtung nach RS (Fig. 13.). Dadurch verkürzt sich die Welle in ihrer Länge nach RF um $\sin\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$ und wird überhaupt $= \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$. Man hat also

$M = m = \sin\varphi \cos\varphi;\quad m' = \sin\varphi' \cos\varphi';\quad m'' = \sin\varphi''(\cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x'')$.

Substituirt man in die letzte Formel für $\operatorname{tang} q''$ seinen Werth aus §. IX. (45)

$$\operatorname{tang} q'' = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\gamma''\sqrt{(1-\gamma''^2)}}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2}$$

und für $\sin x''$ seinen Werth $\dfrac{C \sin\varphi'' - A \cos\varphi'' \cos w}{\sqrt{(1-\gamma''^2)}}$, so wird

$$m'' = \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left(1 - \frac{\sin\varphi''(\pi^2 - \mu^2)\gamma''(C \sin\varphi'' - A \cos\varphi'' \cos w)}{\cos\varphi''[\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2]}\right).$$

Da aber

$$\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2 = \frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi}, \quad \mu^2 = \frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi},$$

und somit

$$\pi^2 - \mu^2 = \frac{\sin^2\varphi'' - \sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi\,(1 - \gamma''^2)}$$

ist, so erhält man auch

$$m'' = \sin\varphi'' \cos\varphi'' \left(1 - \frac{(\sin^2\varphi'' - \sin^2\varphi')(C \sin\varphi'' - A \cos\varphi'' \cos w)\gamma''}{\sin\varphi'' \cos\varphi''(1 - \gamma''^2)}\right);$$

oder

$$m'' = \sin\varphi'' \cos\varphi''(\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x''),$$

wenn man zur Abkürzung

$$\beta'' = \frac{C \sin^2\varphi' \cos\varphi'' - A \cos^2\varphi' \sin\varphi'' \cos w}{\sin\varphi'' \cos\varphi''(C \sin\varphi'' - A \cos\varphi'' \cos w)} \quad (6)$$

setzt.

Hiernach verwandeln sich die Gleichungen (1) in folgende:

$$(S + R_s)\sin\varphi = -D' \cos x' \sin\varphi' + D'' \cos x'' \sin\varphi'', \quad (a)$$

$$(S + R_s)\cos\varphi = -D' \cos x' \cos\varphi' + D'' \cos x'' \cos\varphi'', \quad (b)$$

$$P + R_p = D' \sin x' + D'' \sin x', \quad (c)$$

$$(S^2 + P^2 - R_s^2 - R_p^2)\sin\varphi \cos\varphi = D'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' + D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi''[\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'']. \quad (d')$$

Multiplicirt man die Gleichung (a) und (b) mit einander, und zieht ihr Product von (d′) ab, so bleibt

$$(P^2 - R_p^2)\sin\varphi \cos\varphi$$

$$= D'^2 \sin^2 x' \sin\varphi' \cos\varphi' + D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' \beta'' \sin^2 x'' + D'D'' \cos x' \cos x'' \sin(\varphi' + \varphi'');$$

diese Gleichung durch (c) dividirt, giebt

$$(P - R_p)\sin\varphi \cos\varphi = D' \sin x' \sin\varphi' \cos\varphi' + D'' \sin x'' \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'', \quad (d)$$

denn man findet leicht durch Substitution der zur Abkürzung der Formeln eingeführten Gröfsen, dafs

$$\sin x' \sin x''(\sin\varphi' \cos\varphi' + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') = \cos x' \cos x'' \sin(\varphi' + \varphi'')$$

ist.

2. Aus den 4 linearen Gleichungen (a), (b), (c) und (d) berechnen wir zuerst R_s und R_p. Zu diesem Behufe erhält man aus (c) und (d), wenn man einmal D', dann D'' eliminirt:

$$-P(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi'\cos\varphi')+R_p(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$=D''\sin x''(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi''),$$
$$P(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi''-R_p(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$
$$=D'\sin x'(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'');$$

ebenso aus (a) und (b):

$$S\sin(\varphi-\varphi')+R_s\sin(\varphi+\varphi')=D''\cos x''\sin(\varphi'-\varphi''),$$
$$S\sin(\varphi-\varphi'')+R_s\sin(\varphi+\varphi'')=-D'\cos x'\sin(\varphi'-\varphi'').$$

Setzt man zur Abkürzung $M=\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi''}{\sin(\varphi'-\varphi'')}$, so findet man aus der ersten und dritten der letztern Gleichungen nach Entfernung von D'':

$$R_p=\frac{P\cos x''(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi'\cos\varphi')-MS\sin x''\sin(\varphi-\varphi')-MR_s\sin x''\sin(\varphi+\varphi')}{\cos x''(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')},$$

$$R_s=\frac{P\cos x''(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi'\cos\varphi')-R_p\cos x''(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')-MS\sin x''\sin(\varphi-\varphi')}{M\sin x''\sin(\varphi+\varphi')},$$

ebenso aus der zweiten und vierten Gleichung nach Entfernung von D':

$$R_p=\frac{P\cos x'(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')+MS\sin x'\sin(\varphi-\varphi'')+MR_s\sin x'\sin(\varphi+\varphi'')}{\cos x'(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')},$$

$$R_s=\frac{-P\cos x'(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')+R_p\cos x'(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')-MS\sin x'\sin(\varphi-\varphi'')}{M\sin x'\sin(\varphi+\varphi'')}.$$

Man stelle die beiden eben gefundenen Werthe von R_p einander gleich, und bringe die Gleichung unter die Form:

$$P\cos x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$
$$-P\cos x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$
$$-MS[\sin x''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$
$$+\sin x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')]$$
$$-MR_s[\sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$
$$+\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')]=0.$$

Da dann

$$\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')-\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$
$$=-2\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$$

oder $=-2M\sin\varphi\cos\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')$ ist, so folgt, wenn man

$$N=\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')+\sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'') \quad (7)$$

setzt,

$$R_s=-\frac{1}{N}\{S[\sin x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$+\sin x''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')]$$
$$+2P\cos x'\cos x''\sin\varphi\cos\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\}. \quad (8)$$

Durch Gleichsetzung der beiden Werthe von R_s erhält man auf ganz ähnliche Weise

$$R_p=\frac{1}{N}\{P[\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$+\sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')]$$
$$+2S\sin x'\sin x''\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\}. \quad (9)$$

Wie man sieht, besteht sowohl das reflectirte Licht R_s, welches nach der Einfallsebene schwingt, als auch das reflectirte Licht R_p, welches senkrecht dagegen schwingt, aus Strahlen von den beiden Gattungen S und P zusammen; es wird daher im Allgemeinen unmöglich, einen von beiden Bündeln R_s oder R_p verschwinden zu lassen, und so polarisirtes Licht zu erreichen; denn setzte man R_s oder R_p gleich Null, so entstände eine Bedingungsgleichung zwischen S, P und φ, die erfüllt werden müfste, wenn das reflectirte Licht entweder nach der Einfallsebene oder senkrecht dazu polarisirt sein sollte; diese Gleichung kann aber nicht anders erfüllt werden, als wenn die Schwingungen S und P mit einander in Uebereinstimmung stehen, d. h. wenn das einfallende Licht schon selbst polarisirt war. Es ist jedoch hier ein anderer Fall möglich, in welchem das reflectirte Licht vollständig polarisirt wird. Nämlich in dem reflectirten Lichte gehören in R_s und R_p die Strahlen, welche von dem einfallenden Lichtbündel S herkommen, zusammen und geben unter einem Azimuth α_s polarisirtes Licht, dessen Tangente man findet, wenn man das mit S behaftete Glied in R_p mit demselben Gliede in R_s dividirt. Ebenso gehören die vom einfallenden Lichtbündel P herkommenden Strahlen in R_s und R_p zusammen, und geben unter einem Winkel α_p polarisirtes Licht, dessen Tangente gleich dem Quotienten aus den in R_p und R_s mit P behafteten Gliedern ist. Wird $\tan \alpha_s = \tan \alpha_p$, so fallen die Schwingungsrichtungen beider Strahlensysteme zusammen und das reflectirte Licht erscheint vollständig polarisirt. Man nennt den zur Erfüllung dieser Bedingungsgleichung gehörigen Einfallswinkel φ den Winkel des Polarisationsmaximums und zwar deshalb, weil auch unter andern Einfallswinkeln das reflectirte Licht zum Theil polarisirt ist, (denn die Ungleichheit der Schwingungsweiten in R_s und R_p giebt eine theilweise Polarisation), unter dem zu suchenden Winkel φ dagegen die gröfstmögliche oder vielmehr die vollständige Polarisation erreicht wird. Nach dem Gesagten findet man den Winkel φ des Polarisationsmaximums aus der Bedingungsgleichung

$$\frac{\sin x' \cos x'' \sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')+\sin x''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')}{2\sin x'\sin x''\sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')}$$

$$=\frac{2\cos x'\cos x''\sin\varphi\cos\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')}{\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi'\cos\varphi')+\sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')}.$$

Diese Gleichung reducirt sich nach einigen Umwandlungen zunächst auf

$$\begin{aligned}&\sin^2 x'\cos^2 x''(\sin^2\varphi\cos^2\varphi''-\sin^2\varphi''\cos^2\varphi)(\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\sin^2\varphi'\cos^2\varphi')\\ &+\sin^2 x''\cos^2 x'(\sin^2\varphi\cos^2\varphi'-\sin^2\varphi'\cos^2\varphi)(\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\beta''^2\sin^2\varphi''\cos^2\varphi'')\\ &+2\sin x'\sin x''\cos x'\cos x''(\sin^2\varphi-\sin^2\varphi')[\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''+\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''\\ &\qquad-\sin^2\varphi\sin\varphi'\beta''\sin\varphi''\cos^2\varphi''-\cos^2\varphi\cos\varphi'\beta''\sin^2\varphi''\cos\varphi'']=0.\end{aligned}$$

Setzt man hierin für $\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\sin^2\varphi'\cos^2\varphi'$ seinen Werth $(\sin^2\varphi-\sin^2\varphi')(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi')$, und für $\sin^2\varphi\cos^2\varphi'-\sin^2\varphi'\cos^2\varphi$ seinen Werth $\sin^2\varphi-\sin^2\varphi'$, und läfst den gemeinsamen Factor $\sin^2\varphi-\sin^2\varphi'$ fort, weil derselbe nicht gleich Null sein kann, so erhält man

$$\begin{aligned}&\sin^2 x'\cos^2 x''(\sin^2\varphi\cos^2\varphi''-\sin^2\varphi''\cos^2\varphi)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi')\\ &\qquad+\sin^2 x''\cos^2 x'(\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\beta''^2\sin^2\varphi''\cos^2\varphi'')\\ &+2\sin x'\sin x''\cos x'\cos x''(\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi'\cos\varphi''+\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin\varphi'\sin\varphi''\\ &-\sin^2\varphi\sin\varphi'\beta''\sin\varphi''\cos^2\varphi''-\cos^2\varphi\cos\varphi'\beta''\sin^2\varphi''\cos\varphi'')=0.\end{aligned}$$

Man nehme ferner zur Abkürzung $\mathfrak{A}=\sin x'\cos x''\sin\varphi\cos\varphi''$, $\mathfrak{B}=\sin x'\cos x''\cos\varphi\sin\varphi''$, $\mathfrak{C}=\sin x''\cos x'\sin\varphi\cos\varphi$ und $\mathfrak{D}=\sin x''\cos x'\beta''\sin\varphi''\cos\varphi''$, so bekommt die vorstehende Gleichung die Form

$$\mathfrak{A}^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi') - \mathfrak{B}^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi') + \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos\varphi\cos\varphi'$$
$$- 2\mathfrak{A}\mathfrak{D}\sin\varphi\sin\varphi' - 2\mathfrak{B}\mathfrak{D}\cos\varphi\cos\varphi' + 2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sin\varphi\sin\varphi' = 0,$$

oder, wenn man $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi' = \cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')$, $2\cos\varphi\cos\varphi' = \cos(\varphi+\varphi') + \cos(\varphi-\varphi')$ und $2\sin\varphi\sin\varphi' = \cos(\varphi-\varphi') - \cos(\varphi+\varphi')$ setzt,

$$\mathfrak{A}^2\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - \mathfrak{B}^2\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') + \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos(\varphi+\varphi')$$
$$+ \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos(\varphi-\varphi') - \mathfrak{A}\mathfrak{D}\cos(\varphi-\varphi') + \mathfrak{A}\mathfrak{D}\cos(\varphi+\varphi') - \mathfrak{B}\mathfrak{D}\cos(\varphi+\varphi') - \mathfrak{B}\mathfrak{D}\cos(\varphi-\varphi')$$
$$+ \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cos(\varphi-\varphi') - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cos(\varphi+\varphi') = 0.$$

Wie man leicht sieht, löst sich die letztere Gleichung in die beiden Factoren

$$[(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos(\varphi+\varphi') + \mathfrak{C} - \mathfrak{D}][(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\cos(\varphi-\varphi') + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}] = 0,$$

von denen nur der erstere den Winkel des Polarisationsmaximums bestimmen kann; somit hat man

$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\cos(\varphi+\varphi') + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} = 0,$$

oder, nach Substitution der Werthe für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$,

$$\sin x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi') + \sin x''\cos x'(\sin\varphi\cos\varphi - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'') = 0,$$

oder endlich, wenn man noch die eingeführten Gröfsen

$$\sin x' = \frac{A\sin w}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}}, \qquad \cos x' = \frac{C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos w}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}},$$
$$\cos x'' = \frac{A\sin w}{\sqrt{(1-\gamma''^2)}}, \qquad \sin x'' = \frac{C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos w}{\sqrt{(1-\gamma''^2)}},$$
$$\beta'' = \frac{C\sin^2\varphi'\cos\varphi'' - A\cos^2\varphi'\sin\varphi''\cos w}{\sin\varphi''\cos\varphi''(C\sin\varphi'' - A\cos\varphi''\cos w)}$$

fortschafft,

$$A^2\sin^2 w\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi') + (C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos w)[C\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi'' - C\sin^2\varphi'\cos\varphi''$$
$$- A\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi''\cos w + A\cos^2\varphi'\sin\varphi''\cos w] = 0. \qquad (10)$$

Diese Gleichung giebt den Winkel φ des Polarisationsmaximums; zu seiner Bestimmung ist es nur noch nöthig, φ' und φ'' durch φ auszudrücken, und zwar jenes mittelst der Gleichung

$$\mu\sin\varphi = \sin\varphi', \qquad (11)$$

dieses durch die Gleichung

$$\sin^2\varphi\{\pi^2 + (\mu^2 - \pi^2)[C\cos\varphi'' + A\sin\varphi''\cos w]^2\} = \sin^2\varphi''. \qquad (12)$$

Wir eliminiren zuerst φ'' als den schwierigern Theil der Aufgabe. Aus (10) entwickelt man

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{A^2\sin^2 w\sin\varphi\cos(\varphi+\varphi') - (C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos w)(C\sin^2\varphi' + A\sin\varphi\cos\varphi\cos w)}{A^2\sin^2 w\cos\varphi\cos(\varphi+\varphi') - (C\sin\varphi' - A\cos\varphi'\cos w)(C\sin\varphi\cos\varphi + A\cos^2\varphi'\cos w)};$$

setzt man hierin

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi'\cos\varphi' + \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi'),$$
$$\sin\varphi = \sin\varphi'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\varphi'\sin(\varphi-\varphi'),$$
$$\cos\varphi = \cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi') - \sin\varphi'\sin(\varphi-\varphi'),$$

und der Kürze wegen

$$A^2\sin^2 w\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi') - (C^2\sin^2\varphi' - A^2\cos^2\varphi'\cos^2 w) = M,$$
$$M\cos\varphi' + \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi')[AC\cos\varphi'.\cos w - C^2\sin\varphi'\cos^2 w - \sin\varphi'\sin^2 w] = R,$$

so verwandelt sich diese Gleichung in folgende

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{1}{R}\{M\sin\varphi' + \cos(\varphi+\varphi')\sin(\varphi-\varphi')[A^2\cos\varphi' - AC\sin\varphi'\cos w]\}. \qquad (13)$$

Um diesen Werth in die Gleichung (12) zu substituiren, bringe man dieselbe zuvor unter die Form

$$\pi^2 \sin^2\varphi \left\{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi'' - (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')^2\right\} = \operatorname{tang}^2 \varphi'' - \sin^2 \varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')^2$$

oder

$$\pi^2 \sin^2 \varphi \left[1 - \cos^2 \varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')^2 + \operatorname{tang}^2 \varphi'' - \sin^2\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')^2\right]$$
$$= \operatorname{tang}^2 \varphi'' - \sin^2 \varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')^2,$$

wofür man bekanntlich auch schreiben kann

$$\pi^2 \sin^2\varphi \left\{[(1 + \cos\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')] [1 - \cos\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')]\right.$$
$$\left. + [\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')] [\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')]\right\}$$
$$= [\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')] [\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')]. \quad (14)$$

Man berechnet sich jetzt leicht mittelst des Werthes von $\operatorname{tang}\varphi''$ in (13)

$$C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'' = \frac{1}{R} \left\{(C\cos\varphi' + A \sin\varphi' \cos w) M - \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') [C \sin\varphi' - A \cos\varphi' \cos w]\right\},$$

$$\operatorname{tang}\varphi'' + \sin\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')$$
$$= \frac{1}{R} (1 + C \cos\varphi' + A \sin\varphi' \cos w) [M \sin\varphi' + \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') (\cos\varphi' - C)],$$

$$\operatorname{tang}\varphi'' - \sin\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')$$
$$= \frac{1}{R} (1 - C \cos\varphi' - A \sin\varphi' \cos w) [M \sin\varphi' + \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') (\cos\varphi' + C)],$$

$$1 + \cos\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')$$
$$= \frac{1}{R} (1 + C \cos\varphi' + A \sin\varphi' \cos w) [M \cos\varphi' - \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') (\sin\varphi' - A \cos w)],$$

$$1 - \cos\varphi' (C + A \cos w \operatorname{tang}\varphi'')$$
$$= \frac{1}{R} (1 - C \cos\varphi' - A \sin\varphi' \cos w) [M \cos\varphi' - \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') (\sin\varphi' + A \cos w)],$$

und erhält somit, wenn man diese Werthe in (14) substituirt und dabei den gemeinsamen Factor $1 - (C \cos\varphi' + A \sin\varphi' \cos w)^2$, der selbst nicht gleich Null sein kann, fortläſst, die von φ'' befreite Gleichung des Polarisationsmaximums

$$\pi^2 \sin^2 \varphi \left\{M^2 + A^2 \sin^2 w \cos^2(\varphi + \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi')\right\}$$
$$= \left\{M \sin\varphi' + \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') \cos\varphi'\right\}^2 - C^2 \sin^2(\varphi - \varphi') \cos^2(\varphi + \varphi').$$

Diese Gleichung gewährt eine noch bequemere Uebersicht, wenn man darin für $\pi^2 \sin^2\varphi$ seinen Werth $\sin^2\varphi' + (\pi^2 - \mu^2) \sin^2\varphi$ setzt, denn so erhält man, zugleich nach Entfernung von M,

$$(\pi^2 - \mu^2) \sin^2\varphi \left\{[A^2 \sin^2 w \cos(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') + A^2 \cos^2\varphi' \cos^2 w - C^2 \sin^2\varphi']^2\right.$$
$$\left. + A^2 \sin^2 w \cos^2(\varphi - \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi')\right\}$$
$$= \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi') \sin(\varphi + \varphi') [A^2 \sin^2 w \cos(\varphi + \varphi')$$
$$+ (A^2 \cos^2\varphi' \cos^2 w - C \sin^2\varphi') \sin^2(\varphi - \varphi')]. \quad (15)$$

Man überzeugt sich durch die Form dieser Gleichung bald, daſs es keinen Vortheil bringen kann, noch φ' mittelst der Gleichung (11) zu eliminiren, da man zur Bestimmung von φ auf eine Gleichung vom vierten Grade kommt, deren Lösung nicht zur Hand liegt. Es bleibt hier nur übrig, der Gleichung (15) eine Form zu geben, wodurch sie zur annähernden Berechnung des passenden Werthes von φ bequem wird. Dieser Forderung läſst sich auf folgende Weise sehr gut genügen. Setzt man in (15) für $\sin(\varphi - \varphi') \sin(\varphi + \varphi')$ seinen Werth $(1 - \mu^2) \sin^2\varphi$, so findet man

$$\cos(\varphi + \varphi') = \frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \frac{\left\{\begin{array}{c}(A^2 \sin^2 w \cos(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') + A^2 \cos^2\varphi' \cos^2 w - C^2 \sin^2\varphi')^2 \\ + A^2 \sin^2 w \cos^2(\varphi + \varphi') \sin^2(\varphi - \varphi')\end{array}\right\}}{A^2 \sin^2 w \cos(\varphi + \varphi') + (A^2 \cos^2\varphi' \cos^2 w - C^2 \sin^2\varphi') \cos(\varphi - \varphi')}; \quad (16)$$

multiplicirt man diese Gleichung wieder mit $\cos(\varphi-\varphi')$, und schreibt statt $\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')$ seinen Werth $1-(1+\mu^2)\sin^2\varphi$, so erhält man die Gleichung

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}-\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\left\{\frac{\left\{\begin{array}{c}(A^2\sin^2 w\cos(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')+A^2\cos^2\varphi'\cos^2 w-C^2\sin^2\varphi')^2\\ +A^2\sin^2 w\cos^2(\varphi+\varphi')\sin^2(\varphi-\varphi')\end{array}\right\}}{A^2\sin^2 w\cos(\varphi+\varphi')+(A^2\cos^2\varphi'\cos^2 w-C^2\sin^2\varphi')\cos(\varphi-\varphi')}\right\}\cos(\varphi-\varphi'), \quad (17)$$

die, wie man sieht, sehr bequem ist, um $\sin^2\varphi$ nach den Potenzen der kleinen Gröfse $(\pi^2-\mu^2)$ zu entwickeln. Man bekommt, wenn man zuerst $\cos(\varphi+\varphi')=0$ setzt, da ja $\cos(\varphi+\varphi')$ nach (16) selbst eine Gröfse von der Ordnung $(\pi^2-\mu^2)$ ist,

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}-\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}(A^2\cos^2\varphi'\cos^2 w-C^2\sin^2\varphi'), \quad (18)$$

und daraus nach Substituirung von $A^2\cos^2 w-(A^2\cos^2 w+C^2)\mu^2\sin^2\varphi$ für $A^2\cos^2\varphi'\cos^2 w - C^2\sin^2\varphi'$

$$\sin^2\varphi = \frac{(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2+(\pi^2-\mu^2)A^2\sin^2 w}{1-\pi^2\mu^2+\mu^2(\pi^2-\mu^2)A^2\sin^2 w}. \quad (19)$$

Will man erst $\cos^2(\varphi+\varphi')=0$ setzen, so findet man

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1+\mu^2}-\frac{\pi^2-\mu^2}{1-\mu^4}\left\{A^2\cos^2\varphi'\cos^2 w-C^2\sin^2\varphi'+A^2\sin^2 w\cos(\varphi+\varphi')\frac{\cos 2(\varphi-\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\right\} \quad (20)$$

oder

$$\sin^2\varphi = \frac{(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2+(\pi^2-\mu^2)A^2\sin^2 w\left[1-\frac{\cos(\varphi+\varphi')\cos 2(\varphi-\varphi')}{\cos(\varphi-\varphi')}\right]}{1-\pi^2\mu^2+\mu^2(\pi^2-\mu^2)A^2\sin^2 w}. \quad (21)$$

Ueberdies lehrt noch die Gleichung (16), welche nur $\sin^2 w$ und $\cos^2 w$ enthält, dafs sich bei jeder Reflexionsebene der Winkel des Polarisationsmaximums gleich bleibt, man mag die Einfallsebene unter einem gleichen Azimuth rechts oder links von dem Hauptschnitt des Crystalls legen, ein Resultat, welches durch Beobachtungen bestätigt ist. In zwei Fällen läfst sich die allgemeine Formel abkürzen, nämlich erstens, wenn $w=0$ ist, dann wird

$$\sin^2\varphi = \frac{(1-\pi^2)A^2+(1-\mu^2)C^2}{1-\pi^2\mu^2}; \quad (22)$$

zweitens wenn $w=90^\circ$ ist, dann wird nach der ersten Annäherungsformel

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\mu^2}{1-\mu^2(\pi^2 C^2+\mu^2 A^2)}, \quad (23)$$

und etwas genauer nach der zweiten

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\mu^2}{1-\mu^2\left\{\pi^2 C^2+\mu^2 A^2+\frac{(\pi^2-\mu^2)^2}{1-\mu^2}A^2C^2[1-\tang^2(\varphi-\varphi')]\right\}}. \quad (24)$$

Zur Bestätigung der ersten Formel besitzen wir von Seebeck folgende Beobachtungen an Kalkspath, bei denen man jedoch nicht die Thatsache übersehen darf, dafs angeschliffene Oberflächen stets einen die Resultate störenden Einflufs ausüben. Bei der Berechnung ist $\pi=0{,}67254$ und $\mu=0{,}60288$ genommen.

Neigung d. reflect. Fläche gegen d. Axe	φ beob.	φ berechn.	Neigung d. reflect. Fläche gegen d. Axe	φ beob.	φ berechn.
0° 12′	54° 14′,9	54° 3′,4	45° 29′	57° 21′,9	57° 23′,2
0 25	54 12,4	54 3,5	45 43½	57 21,3	57 24,9
27 2	55 36,1	55 23,4	64 1½	59 19,0	59 25,8
45 23½	57 19,7	57 22,5			

Zu der zweiten Formel hat derselbe Physiker folgende Messungen ausgeführt, die ich nach (23) berechnet habe.

Neigung etc.	φ beob.	φ berechn.
0° 12′	58° 56′	58° 54′,9
0 25	58 56,1	58 54,9
27 2	59 3,9	59 17,1
45 23,5	59 50,9	59 50,2
45 29	59 47,7	59 50,3
45 43,5	59 46,7	59 50,9
64 1,5	60 14,8	60 24,6
89 47,5	60 33,4	60 47,1

Bei allen übrigen Messungen mufs man sich zur Berechnung der Formel (19), oder wenn man will, der Formel (21) bedienen. Man vergleiche z. B. Seebecks Beobachtungen auf der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths, deren Berechnung nach (19) beigegeben ist.

w.	φ beob.	φ berechn.
0° 0′	57° 19,7	57° 22′,5
22 30	57 45,9	57 44,1
45 0	58 33,9	58 36,2
67 30	59 29,1	59 28,5
90 0	59 50,9	59 50,2

In dem ganz speciellen Falle noch, dafs die Oberfläche des Crystalls mit einem Mittel bedeckt wäre, dessen Brechungsexponent $= \mu$ ist, würde man $\varphi' = \varphi$ haben; man erhielte jetzt zur Bestimmung für den Winkel des Polarisationsmaximums aus (15)

$$\sin^2\varphi = \frac{A^2}{1 + A^2 \sin^2 w}.$$

3. Wie wir oben bemerkten, bildet das unter den Winkel des Polarisationsmaximums reflectirte Licht mit der Einfallsebene einen Winkel $= \alpha_s$ oder α_p, der, wenn man ihn allgemein mit α bezeichnet, durch

$$\tan g\,\alpha = -\frac{2 \sin x' \sin x'' \sin\varphi \cos\varphi (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')}{\left\{\begin{array}{l} \sin x' \cos x'' \sin(\varphi - \varphi'')(\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi') \\ + \sin x'' \cos x' \sin(\varphi - \varphi')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') \end{array}\right\}}$$

bestimmt wird. Setzt man hierin aus der Bedingungsgleichung für das Polarisationsmaximum

$$\sin x' \cos x'' \sin(\varphi - \varphi'') \cos(\varphi + \varphi') = -\sin x'' \cos x' (\sin\varphi \cos\varphi - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi''),$$

so geht die Gleichung über in

$$\tan g\,\alpha = \frac{A \sin w \cos(\varphi + \varphi')}{C \sin\varphi' - A \cos\varphi' \cos w}. \quad (25)$$

Man erhält also für $\tang \alpha$ ein höchst einfaches Resultat. Will man übrigens bei der Berechnung nicht erst den Winkel des Polarisationsmaximums ermitteln, so setze man aus (16) für $\cos(\varphi + \varphi')$ seinen Werth, nämlich

$$\cos(\varphi + \varphi') = \frac{\pi^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}(A^2 \cos^2\varphi' \cos^2 w - C^2 \sin^2\varphi'),$$

dann findet man

$$\tang \alpha = \frac{\mu^2 - \pi^2}{1 - \mu^2} A \sin w (C \sin\varphi' + A \cos\varphi' \cos w).$$

Zur Prüfung dieser Formel hat Seebeck ebenfalls mehere Messungen geliefert, von denen ich die an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths angeben will, und die ich mit Benutzung des vorher bestimmten Polarisationswinkels berechnet habe.

w.	α beob.	α berechn.
0° 0′	0° 0′	0° 0′
22 30	− 2 9	− 2 13,2
45	− 3 38	− 3 33,3
67 30	− 3 34	− 3 31,3
90	− 2 30	− 2 22,2
112 30	− 0 48	− 0 49,4
135	+ 0 23	+ 0 16,1
157 30	+ 0 18	+ 0 28,3
180	0 0	0 0

In dem eigenthümlichen Falle, dafs $\mu = 1$ oder $\varphi' = \varphi$ ist, findet man, wenn nur nach der Einfallsebene polarisirtes Licht auffällt,

$$\tang \alpha_s = -\frac{2 \sin x' \sin x'' \sin\varphi \cos\varphi (\sin\varphi \cos\varphi - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')}{2 \sin x' \cos x'' \sin\varphi \cos\varphi \sin(\varphi - \varphi'')},$$

und die Gleichung verwandelt sich nach einigen Reductionen in

$$\tang \alpha_s = \frac{C \sin\varphi + A \cos\varphi \cos w}{A \sin w}. \quad (26)$$

Ebenso findet man, wenn nur senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht auffällt,

$$\tang \alpha_p = -\frac{2 \sin x'' \cos x' \sin\varphi \cos\varphi (\sin\varphi \cos\varphi - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')}{2 \cos x' \cos x'' \sin\varphi \cos\varphi (\sin(\varphi - \varphi'')},$$

oder wieder

$$\tang \alpha_p = \frac{C \sin\varphi + A \cos\varphi \cos w}{A \sin w}. \quad (27)$$

Beide Winkel sind gleich, also wird in diesem speciellen Falle unter jedem Einfallswinkel polarisirtes Licht reflectirt.

Die bisherigen Formeln bestimmen das Azimuth des reflectirten polarisirten Lichtes, wenn gewöhnliches Licht auf den Crystall fällt. Ist dagegen das einfallende Licht von einer Intensität = 1 schon in einem Azimuth a polarisirt, ist also $S = \cos a$ und $P = \sin a$, so bleibt auch das reflectirte Licht polarisirt, nur ändert sich das Azimuth seiner Polarisationsebene in α, welches man, wenn man zur Abkürzung

$$Q = \cos a \,[\sin x' \cos x'' \sin(\varphi - \varphi'')(\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi') + \sin x'' \cos x' \sin(\varphi - \varphi') \times (\sin\varphi \cos\varphi + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') + 2 \sin a \cos x' \cos x'' \sin\varphi \cos\varphi \sin(\varphi' - \varphi'')]$$

setzt, aus der Gleichung

$$\tan g\, \alpha = -\frac{1}{Q}\{\sin a [\sin x' \cos x'' \sin(\varphi + \varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi') + \sin x''\cos x' \sin(\varphi + \varphi') \times (\sin\varphi\cos\varphi - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')] + 2\cos a \sin x' \sin x'' \sin\varphi\cos\varphi(\sin\varphi'\cos\varphi' - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\} \quad (28)$$

findet. Nimmt man in dieser Gleichung $S = 0$, oder $\cos a = 0$, $\sin a = 1$ an, das heifst, fällt nur senkrecht gegen die Einfallsebene polarisirtes Licht ein, so wird

$$\tan g\, \alpha = -\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi') \\ + \sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\end{array}\right\}}{\cos x'\cos x''\sin 2\varphi \sin(\varphi' - \varphi'')}, \quad (29)$$

nimmt man dagegen $P = 0$ oder $\cos a = 1$, $\sin a = 0$ an, so wird

$$\tan g\, \alpha = -\frac{\sin x'\sin x''\sin 2\varphi(\sin\varphi'\cos\varphi' - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')}{\left\{\begin{array}{l}\sin x'\cos x''\sin(\varphi - \varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi') \\ + \sin x''\cos x'\sin(\varphi - \varphi')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\end{array}\right\}}. \quad (30)$$

Zur Prüfung der vorstehenden drei Gleichungen hat Neumann an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths viele Beobachtungen angestellt, bei denen er jedoch in der ersten α als gegebenen Winkel und a gemessen und berechnet hat; man wird sich zu diesem Behufe die obige Gleichung leicht umformen können. Ich gebe nur einige von seinen Messungen sammt seiner Berechnung.

Zu Formel (28). $\varphi = 45°$.

w	α	a beob.	a berechn.
45°	+ 45°	— 71° 0′	— 71° 5′
45	— 45	+ 69 40	+ 69 52
90	+ 45	+ 53 33	+ 53 27
90	— 45	— 64 19	— 64 24
135	+ 45	— 74 15	— 74 10
135	— 45	+ 67 11	+ 67 15
157½	+ 45	— 74 39,5	— 74 46
157½	— 45	+ 70 25	+ 70 33

Zu Formel (29). $\varphi = 45°$.

w	α beob.	α berechn.
45°	— 87° 37′	— 87° 42′
61 28′	— 89 57	— 90 0
67 30	+ 88 47	+ 88 42
90	+ 83 59	+ 83 55
135	+ 78 37	+ 78 19
157 30	+ 81 58	+ 81 51

Zu Formel (30). $\varphi = 57° 47'$.

w	α beob.	α berechn.
22½	— 2° 18′	— 2° 12′
45	— 3 45,7	— 3 41,5
67½	— 3 44,5	— 3 46,5
90	— 2 31,	— 2 32,5
135	+ 0 16,6	+ 0 13,7
157½	+ 0 28,3	+ 0 28,5

Soll $\tan g\, \alpha = 0$ werden, so mufs

$$\tan g\, a = -\frac{\sin x'\sin x''\sin 2\varphi(\sin\varphi'\cos\varphi' - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')}{\left\{\begin{array}{l}\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi') \\ + \sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\end{array}\right\}}$$

sein; soll dagegen $\tan g\, \alpha = \infty$ werden, so mufs

$$\tang a = -\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin x' \cos x'' \sin(\varphi - \varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi') \\ + \sin x'' \cos x' \sin(\varphi - \varphi')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\end{array}\right\}}{\cos x' \cos x'' \sin 2\varphi \sin(\varphi' - \varphi'')} \quad (32)$$

sein. Auch zu diesen Formeln hat Neumann genaue Messungen geliefert, die ich aber der Kürze wegen übergehen will.

4. Wir wenden uns nach diesen Untersuchungen über das reflectirte Licht zu den Gesetzen, welchen die beiden gebrochenen Lichtstrahlen unterworfen sind. Man erhält zunächst die Schwingungsweiten derselben D' und D'', indem man aus den 4 Hauptgleichungen (a), (b), (c) und (d) R_s und R_p eliminirt, dies giebt

$$2S\sin\varphi\cos\varphi = -D'\cos x'\sin(\varphi + \varphi') + D''\cos x''\sin(\varphi + \varphi''),$$

und $2P\sin\varphi\cos\varphi = D'\sin x'(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi') + D''\sin x''(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')$;

setzt man wie oben

$$N = \sin x'\cos x''\sin(\varphi + \varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi') + \sin x''\cos x'\sin(\varphi + \varphi')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi''),$$

so findet man hieraus

$$D' = \frac{1}{N}[P\cos x''\sin(\varphi + \varphi'') - S\sin x''(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'']\sin 2\varphi, \quad (33)$$

$$D'' = \frac{1}{N}[S\sin x'(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi'\cos\varphi') + P\cos x'\sin(\varphi + \varphi')]\sin 2\varphi. \quad (34)$$

Wenn das einfallende Licht von einer Intensität $= 1$ im Azimuth a polarisirt, oder $S = \cos a$ und $P = \sin a$ ist, so verschwindet D' oder der gewöhnliche Strahl bei

$$\tang a = \frac{\tang x''(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi'')}, \quad (35)$$

und D'' oder der ungewöhnliche Strahl bei

$$\tang a = -\tang x'\cos(\varphi - \varphi'). \quad (36)$$

Beide Formeln hat Neumann durch Beobachtungen an der natürlichen Bruchfläche des Kalkspaths bestätigt, wie die folgenden Reihen zeigen.

Zu Formel (35).				Zu Formel (36).			
w	φ	a beob.	a berechn.	w	φ	a beob.	a berechn.
45°	45°	— 15° 27',8	— 15° 26'	45°	45°	+ 72° 38'	+ 72° 36'
60	50	+ 1 39	+ 1 30	60	50	— 88 20,5	— 88 16,5
90	45	+ 22 28	+ 22 33	90	45	— 65 25	— 65 20,
90	53	+ 24 27, 5	+ 24 29	90	53	— 61 55	— 61 51
135	45	+ 55 28	+ 55 31	135	45	— 31 50,5	— 31 52
141	50	+ 59 44	+ 59 39	141	50	— 28 30	— 28 27,5

Um endlich die Intensität der gebrochenen Strahlen zu bestimmen, nehme man die Intensität des einfallenden Lichtes $= 1$ an, dann erhält man die Intensität I' des gewöhnlichen Strahls aus

$$I' = \frac{D'^2\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin\varphi\cos\varphi}, \quad (37)$$

und die Intensität I'' des ungewöhnlichen Strahls

$$I'' = \frac{D''^2\sin\varphi''\cos\varphi''(\cos^2 x'' + \beta''\sin^2 x'')}{\sin\varphi\cos\varphi}. \quad (38)$$

Nach diesen Formeln stellt sich das Verhältnifs der Intensitäten in beiden Strahlen auf

$$I' : I'' = D'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' : D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' (\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'')$$

woraus man nach Substitution der Werthe für D' und D''

$$I' : I'' = [S^2 \sin^2 x' (\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi')^2 + P^2 \cos^2 x' \sin^2 (\varphi + \varphi')] \sin\varphi' \cos\varphi' :$$
$$[P^2 \cos^2 x'' \sin^2 (\varphi + \varphi'') + S^2 \sin^2 x'' (\sin\varphi \cos\varphi + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')^2]$$
$$\times \sin\varphi'' \cos\varphi'' (\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'') \quad (39)$$

erhält. Sobald es übrigens hier nur auf eine abgekürzte Formel ankommt, kann man $\varphi' = \varphi''$ setzen, und erhält die einfachere Proportion

$$I' : I'' = 1 - \sin^2 x' \sin^2 (\varphi - \varphi') : 1 - \cos^2 x' \sin^2 (\varphi - \varphi'). \quad (40)$$

In den bisher behandelten Fällen ist das Wichtigste enthalten, was bei der Reflexion des Lichtes von der Oberfläche einaxiger Crystalle in Frage kommen kann. Wir suchen jetzt noch die Beantwortung der Fragen zu geben, welche bei der Reflexion im Innern eines solchen Crystalls vorkommen.

5. Wenn ein gewöhnlicher Strahl durch das Innere eines Crystalls geht und auf die Endfläche desselben trifft, die ihn von einem gleichförmig elastischen Medium, z. B. von Luft, scheidet, so tritt er theils aus dem Crystall hervor, theils wird er in zwei in einer gewöhnlichen und einer ungewöhnlichen Welle reflectirt. Man wird sich leicht davon überzeugen, dafs die aus dem Crystall tretende Welle gegen die ursprüngliche grade in einem umgekehrten Verhältnisse steht, als wenn sie die erzeugende, diese die gebrochene Welle wäre, deshalb mufs auch das ausfahrende Licht unter einem solchen Azimuth polarisirt sein, dafs es selbst nach umgekehrter Richtung einfallend nur die gewöhnlich gebrochene Welle erzeugte. Ebenso wird man es sich ohne weitere Schwierigkeiten deutlich machen, dafs die reflectirten Wellen demselben Gesetz unterworfen sind, als entständen sie durch einen von aufsen in derselben Ebene aber unter entgegengesetztem Winkel einfallenden Strahl, als unter welchem derselbe aus dem Crystall hervortritt. Setzt man daher diesen Winkel $= \varphi$ so findet man die Neigung der Wellenebenen der gewöhnlich und ungewöhnlich reflectirten Strahlen und ebenso das Azimuth ihrer Polarisationsrichtungen durch dieselben Formeln wie früher, sofern man nur w mit $180^\circ + w$ vertauscht. Lassen wir also wie oben die Neigung der einfallenden Wellenebene gegen die reflectirende Ebene $= \varphi'$, des ausfahrenden Strahls $= \varphi$, der gewöhnlich reflectirten $= \varphi'_1$, und der ungewöhnlich reflectirten $= \varphi''_1$ sein, wo der Strich unten an φ'_1 und φ''_1 anzeigen soll, dafs man in den vorher gegebenen Formeln w in $180^\circ + w$ zu verwandeln habe, (bei φ'_1 übrigens können wir den untern Strich fortlassen, weil hier w aufser Spiel bleibt), behält man ferner die Bezeichnungen für die Winkel der Polarisationsrichtungen gegen die Einfallsebene bei, nämlich für die einfallende Welle x', demgemäfs für die gewöhnlich reflectirte x'_1, für die ungewöhnlich reflectirte x''_1, setzt aufserdem die Schwingungsweite des ausfahrenden Strahls nach der Einfallsebene $= S'$, senkrecht dazu $= P'$, und die Schwingungsweiten der reflectirten Strahlen $= R'$ und R'', so stellt man nach Grundsätzen wie oben die zur Lösung aller Fragen erforderlichen 4 Hauptgleichungen ohne weitere Schwierigkeit her. Nur in Betreff der Zeichen mufs man Sorgfalt anwenden; am natürlichsten läfst man wohl $\cos x'$ wieder negativ sein, dem entsprechend auch $\cos x'$, und richtet sich im Uebrigen nach den frühern Gleichungen, indem man die erforderlichen Zeichenveränderungen in den Werthen selbst läfst, welche durch die eingeführten trigonometrischen Linien der Winkel x'_1 und x''_1 ausgedrückt werden. Nach diesen Bemerkungen ist

$$\sin x' = \frac{A \sin w}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}}, \qquad \cos x' = \frac{C \sin\varphi' - A \cos\varphi' \cos w}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}},$$

$$\sin x'_1 = -\frac{A \sin w}{\sqrt{(1-\gamma_1'^2)}}, \qquad \cos x'_1 = \frac{C \sin\varphi' + A \cos\varphi' \cos w}{\sqrt{(1-\gamma_1'^2)}},$$

$$\sin x''_1 = \frac{C \sin\varphi''_1 + A \cos\varphi''_1 \cos w}{\sqrt{(1-\gamma_1''^2)}}, \qquad \cos x''_1 = -\frac{A \sin w}{\sqrt{(1-\gamma_1''^2)}},$$

$$\beta''_1 = \frac{C \sin^2\varphi' \cos\varphi''_1 + A \cos^2\varphi' \sin\varphi''_1 \cos w}{\sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1 (C \sin\varphi''_1 + A \cos\varphi''_1 \cos w)},$$

aufserdem

$$\gamma' = C \cos\varphi' + A \sin\varphi' \cos w,$$
$$\gamma'_1 = C \cos\varphi' - A \sin\varphi' \cos w,$$
$$\gamma''_1 = C \cos\varphi''_1 - A \sin\varphi''_1 \cos w.$$

Und die vier Hauptgleichungen sind:

$$S' \sin\varphi = - D' \cos x' \sin\varphi' - R' \cos x'_1 \sin\varphi' + R'' \cos x''_1 \sin\varphi''_1, \qquad (a')$$

$$S' \cos\varphi = - D' \cos x' \cos\varphi' + R' \cos x'_1 \cos\varphi' - R'' \cos x''_1 \cos\varphi''_1, \qquad (b')$$

$$P' = D' \sin x' - R' \sin x'_1 - R'' \sin x''_1 \qquad (c')$$

$$(P'^2 + S'^2) \sin\varphi \cos\varphi$$
$$= D'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' - R'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' - R''^2 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1 (\cos^2 x''_1 + \beta''_1 \sin^2 x''_1).$$

Multiplicirt man die beiden ersten mit einander, und zieht sie von der letzten ab, so bleibt

$$P'^2 \sin\varphi \cos\varphi = D'^2 \sin^2 x' \sin\varphi' \cos\varphi' - R'^2 \sin^2 x'_1 \sin\varphi' \cos\varphi' - R''^2 \sin^2 x''_1\, \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1$$
$$- D'R'' \cos x' \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1) - R'R'' \cos x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1).$$

Wird diese Gleichung durch (c′) dividirt, so entsteht die vierte lineare Hauptgleichung, nämlich

$$P' \sin\varphi \cos\varphi = D' \sin x' \sin\varphi' \cos\varphi' + R' \sin x'_1 \sin\varphi' \cos\varphi' + R'' \sin x''_1\, \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1; \qquad (d')$$

denn es ist

$$D'R'' \sin x' \sin x''_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) = D'R'' \cos x' \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1)$$

und

$$R'R'' \sin x'_1 \sin x''_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) = R'R'' \cos x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1).$$

Um nämlich die Richtigkeit dieser Relationen zu beweisen, ziehe man aus der erstern

$$\beta''_1 = \frac{\sin x' \sin x''_1 \sin\varphi' \cos\varphi' - \cos x' \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1)}{\sin x' \sin x''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1},$$

und man wird finden, dafs sich diese Gleichung durch Substitution der angegebenen Werthe für $\sin x'$, $\cos x'$, $\sin x''_1$, $\cos x''_1$ auf

$$\beta''_1 = \frac{C \sin^2\varphi' \cos\varphi''_1 + A \cos^2\varphi' \sin\varphi''_1 \cos w}{\sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1 (C \sin\varphi''_1 + A \cos\varphi''_1 \cos w)}$$

reducirt, welches eben der obige Werth von β''_1 ist. Ebenso entnehme man aus der zweiten Relation

$$\beta''_1 = \frac{\cos x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1) - \sin x'_1 \sin x''_1 \sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin x'_1 \sin x''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1},$$

und auch dieser Werth wird sich nach den erforderlichen Substitutionen in den obigen umformen.

6. Aus den 4 linearen Hauptgleichungen eliminiren wir zuerst R' und R'', um P' und S, zu berechnen. Die beiden Gleichungen (a′) und (b′) geben

$$S' \sin(\varphi + \varphi') = -2D' \cos x' \sin\varphi' \cos\varphi' - R'' \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1), \quad (41)$$

$$S' \sin(\varphi + \varphi''_1) = -D' \cos x' \sin(\varphi' + \varphi''_1) - R' \cos x'_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1), \quad (42)$$

die beiden andern (c′) und (d′)

$$P' (\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi')$$
$$= 2D' \sin x' \sin\varphi' \cos\varphi' - R'' \sin x''_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi'' \cos\varphi''_1), \quad (43)$$

$$P' (\sin\varphi \cos\varphi + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)$$
$$= D' \sin x' (\sin\varphi' \cos\varphi' + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) + R' \sin x'_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1). \quad (44)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (41) und (43) eliminirt man R'', durch Verbindung von (42) und (44) R', und findet so

$$-S' \sin x''_1 \sin(\varphi + \varphi')(\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) + P' \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1)(\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi')$$
$$= 2D' [\sin x' \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1) + \cos x' \sin x''_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)] \sin\varphi' \cos\varphi',$$

und

$$S' \sin x'_1 \sin(\varphi + \varphi''_1) (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) + P' \cos x'_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1) (\sin\varphi \cos\varphi + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)$$
$$= D' [\sin x' \cos x'_1 \sin(\varphi' - \varphi''_1) (\sin\varphi' \cos\varphi' + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)$$
$$- \cos x' \sin x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1) (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)].$$

Diese beiden Gleichungen reichen hin, um P' und S' durch D' allein zu bestimmen; man erhält aus ihnen, wenn man zur Abkürzung

$$N_1 = \sin x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi + \varphi''_1) (\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi')$$
$$+ \sin x''_1 \cos x'_1 \sin(\varphi + \varphi') (\sin\varphi \cos\varphi + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) \quad (45)$$

setzt,

$$P' = \frac{1}{N_1} \Big[D' \sin x' \big\{ \cos x'_1 \sin x''_1 \sin(\varphi + \varphi') (\sin\varphi' \cos\varphi' + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)$$
$$+ 2 \cos x''_1 \sin x'_1 \sin(\varphi + \varphi''_1) \sin\varphi' \cos\varphi' \big\}$$
$$+ D' \cos x' \sin x'_1 \sin x''_1 \sin(\varphi - \varphi') (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta''_1 \sin\varphi'' \cos\varphi'') \Big], \quad (46)$$

$$S' = -\frac{1}{N_1} \Big[D' \cos x' \big\{ \sin x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1) (\sin\varphi \cos\varphi + \sin\varphi' \cos\varphi')$$
$$+ 2 \sin x''_1 \cos x'_1 \sin\varphi' \cos\varphi' (\sin\varphi \cos\varphi + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) \big\}$$
$$+ D' \sin x' \cos x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' - \varphi'') (\sin\varphi \cos\varphi - \sin\varphi' \cos\varphi') \Big]. \quad (47)$$

Da das Azimuth α' des aus dem Crystall tretenden Strahls durch $\operatorname{tang}\alpha' = \frac{P'}{S'}$ bestimmt wird, so kann man $\operatorname{tang}\alpha'$ aus (46) und (47) herleiten. Ich schreibe die weitläufigen Formeln nicht her, weil fast in allen Fällen die unten anzugebenden abgekürzten Gleichungen genügen.

Zweitens suchen wir aus den 4 Hauptgleichungen die Werthe für R' und R''. Eliminirt man zu diesem Behufe S' aus (a′) und (b′), so findet man

$$0 = -D' \cos x' \sin(\varphi - \varphi') + R' \cos x'_1 \sin(\varphi + \varphi') - R'' \cos x''_1 \sin(\varphi + \varphi''_1), \quad (48)$$

eliminirt man auf gleiche Weise P' aus (c′) und (d′), so wird

$$0 = D' \sin x' \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi + \varphi') - R' \sin x'_1 \sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')$$
$$- R'' \sin x''_1 (\sin\varphi \cos\varphi + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1). \quad (49)$$

Die beiden Gleichungen (48) und (49) mit einander verbunden geben

$$R' = \frac{1}{N_1} D' [\cos x' \sin x''_1 (\sin\varphi \cos\varphi + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1)$$
$$+ \sin x' \cos x''_1 \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi + \varphi''_1) \sin(\varphi - \varphi'), \quad (50)$$

und

$$R'' = \frac{1}{N^1} D' [\cos x' \sin x'_1 \cos(\varphi - \varphi') - \sin x' \cos x'_1 \cos(\varphi + \varphi')] \sin(\varphi - \varphi'). \quad (51)$$

Aus den beiden letztern Gleichungen folgert man, dafs der ungewöhnlich reflectirte Strahl verschwindet, wenn $R'' = 0$ oder wenn

$$\cos x' \sin x'_1 \cos(\varphi - \varphi') = \sin x' \cos x'_1 \cos(\varphi + \varphi') \quad (52)$$

ist. Die Substitution der oben angegebenen Werthe für $\sin x'$, $\cos x'$, $\sin x'_1$ und $\cos x'_1$ bringt diese Bedingungsgleichung auf die Form

$$A \sin w\, [(C \sin \varphi' + A \cos \varphi' \cos w) \cos(\varphi + \varphi') + (C \sin \varphi' - A \cos \varphi' \cos w) \cos(\varphi - \varphi')] = 0$$

oder

$$A \sin w\, [C \cos \varphi - A \sin \varphi \cos w] = 0.$$

Also verschwindet der ungewöhnlich reflectirte Strahl in 3 Fällen, erstens, wenn $A = 0$ ist, d. h. wenn die reflectirende Fläche des Crystalls senkrecht gegen die Axe steht, zweitens, wenn $w = 0$ ist, d. h. wenn die Einfallsebene im Hauptschnitt liegt, und drittens, wenn die Bedingung $\tang \varphi = \frac{C}{A \cos w}$ erfüllt wird. Der gewöhnlich reflectirte Strahl verschwindet unter der Bedingung, dafs man

$$\cos x' \sin x''_1 (\sin \varphi \cos \varphi + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''_1) + \sin x' \cos x''_1 \cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi + \varphi''_1) = 0 \quad (53)$$

hat, eine Gleichung, die sich nach den nöthigen Substitutionen nicht auf bequeme Weise vereinfachen läfst. Uebrigens hat in dem Falle, dafs R'' verschwindet, die Tangente des Azimuths des ausfahrenden Strahls einen einfachen Ausdruck; man erhält nämlich aus (41) und (43)

$$\frac{P'}{S'} \text{ oder } \tang \alpha' = -\frac{\tang x'}{\cos(\varphi - \varphi')}; \quad (54)$$

zusammengesetzter ist der Ausdruck, wenn R' verschwindet; man findet aus (42) und (44)

$$\frac{P'}{S'} \text{ oder } \tang \alpha' = -\tang x' \frac{\sin(\varphi + \varphi''_1)(\sin \varphi' \cos \varphi' + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''_1)}{\sin(\varphi' + \varphi''_1)(\sin \varphi \cos \varphi + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''_1)},$$

wofür man auch, da nach (53)

$$\tang x' = -\tang x''_1 \frac{\sin \varphi \cos \varphi + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''_1}{\cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi + \varphi''_1)}$$

ist, schreiben kann

$$\tang \alpha' = \tang x''_1 \frac{\sin \varphi' \cos \varphi' + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''}{\cos(\varphi + \varphi') \sin(\varphi' + \varphi''_1)}. \quad (55)$$

In den meisten Fällen genügt es, annähernde Werthe für die obigen Gröfsen zu haben; man setze hierzu $\varphi' = \varphi''_1$, also $\beta''_1 = 1$, dann erhält man

$$P' = \frac{D' \sin x' \sin 2\varphi'}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')}, \quad (56)$$

$$S' = -\frac{D' \cos x' \sin 2\varphi'}{\sin(\varphi + \varphi')}, \quad (57)$$

$$\frac{P'}{S'} = -\frac{\tang x'}{\cos(\varphi - \varphi')}, \quad (58)$$

$$R' = \frac{D' \sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')} \{\cos x' \sin x''_1 \cos(\varphi - \varphi') + \sin x' \cos x''_1 \cos(\varphi + \varphi')\}, \quad (59)$$

$$R'' = -\frac{D' \sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')} \{\cos x' \sin x'_1 \cos(\varphi - \varphi') - \sin x' \cos x'_1 \cos(\varphi + \varphi')\}. \quad (60)$$

7. Dem Bisherigen ganz analog ist das Verhältnifs, welches statt findet, sobald ein ungewöhnlicher Strahl durch einen einaxigen Crystall hindurchgeht und an der untern Fläche theils in ein gleichförmig elastisches Medium heraustritt, theils als gewöhnliche und ungewöhnliche Welle reflectirt wird. Es bleiben hier nicht nur die schon vorher gebrauchten Bezeichnungen, indem allein D' in D'', x' in x'' und demgemäfs S' und P' der Uebereinstimmung wegen in S'' und P'' übergehen, sondern auch die Wahl der Zeichen vor den einzelnen Gliedern bietet keine neuen Schwierigkeiten dar. Wir erhalten unmittelbar die 4 Hauptgleichungen:

$$S'' \sin\varphi = D'' \cos x'' \sin\varphi'' - R' \cos x'_1 \sin\varphi' + R'' \cos x''_1 \sin\varphi''_1, \quad (\text{a}'')$$

$$S'' \cos\varphi = D'' \cos x'' \cos\varphi'' + R' \cos x'_1 \cos\varphi' - R'' \cos x''_1 \cos\varphi''_1, \quad (\text{b}'')$$

$$P'' = D'' \sin x'' - R' \sin x'_1 - R'' \sin x''_1, \quad (\text{c}'')$$

$$(P''^2 + S''^2) \sin\varphi \cos\varphi = D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' (\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'') - R'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' - R''^2 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1 (\cos^2 x''_1 + \beta''_1 \sin^2 x''_1).$$

Multiplicirt man auch hier die beiden ersten Gleichungen mit einander und zieht ihr Product von der letzten an, so bleibt

$$P''^2 \sin\varphi\cos\varphi = D''^2 \sin^2 x'' \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'' - R'^2 \sin^2 x'_1 \sin\varphi' \cos\varphi' - R''^2 \sin^2 x''_1 \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1$$
$$+ D''R' \cos x'' \cos x'_1 \sin(\varphi' - \varphi'') - R'R'' \cos x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1) + D''R'' \cos x'' \cos x''_1 \sin(\varphi'' - \varphi''_1);$$

dividirt man hierin mit (c''), so erhält man die vierte lineare Hauptgleichung

$$P'' \sin\varphi \cos\varphi = D'' \sin x'' \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'' + R' \sin x'_1 \sin\varphi' \cos\varphi' + R'' \sin x''_1 \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1, \quad (\text{d}'')$$

sofern die folgenden drei Relationen statt finden:

$$D''R' \sin x'' \sin x'_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') = D''R' \cos x'' \cos x'_1 \sin(\varphi' - \varphi''),$$

$$R'R'' \sin x'_1 \sin x''_1 (\sin\varphi' \cos\varphi' + \beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1) = R'R'' \cos x'_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1),$$

und

$$D''R'' \sin x'' \sin x''_1 (\beta''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1 - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') = D''R'' \cos x'' \cos x''_1 \sin(\varphi'' - \varphi''_1).$$

Die erste Relation giebt

$$\beta'' = \frac{\sin x'' \sin x'_1 \sin\varphi' \cos\varphi' - \cos x'' \cos x'_1 \sin(\varphi' - \varphi'')}{\sin\varphi'' \cos\varphi'' \sin x'' \sin x'_1};$$

substituirt man hierin für $\sin x''$, $\cos x''$, $\sin x'_1$, $\cos x'_1$ ihre Werthe, so findet man leicht

$$\beta'' = \frac{C \sin^2\varphi' \cos\varphi'' - A \cos^2\varphi' \sin\varphi'' \cos w}{\sin\varphi'' \cos\varphi'' (C \sin\varphi'' - A \cos\varphi'' \cos w)}$$

grade so, wie es verlangt wird. Die zweite Relation giebt

$$\beta''_1 = \frac{\cos x_1 \cos x''_1 \sin(\varphi' + \varphi''_1) - \sin x'_1 \sin x''_1 \sin\varphi' \cos\varphi'}{\sin x'_1 \sin x''_1 \sin\varphi''_1 \cos\varphi''_1},$$

einen Werth, dessen Richtigkeit schon oben erwiesen wurde. Substituirt man endlich in die dritte Relation für die trigonometrischen Linien von x'' und x''_1, und ebenso für β'' und β''_1 ihre Werthe, so erhält man

$$-A^2 \sin^2 w \sin(\varphi'' - \varphi''_1) = C^2 \sin^2\varphi' \sin(\varphi'' - \varphi''_1) + 2AC \cos^2\varphi' \sin\varphi'' \sin\varphi''_1 \cos w$$
$$- 2AC \sin^2\varphi' \cos\varphi'' \cos\varphi''_1 \cos w + A^2 \cos^2\varphi' \cos^2 w \sin(\varphi'' - \varphi''_1).$$

Da aber

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi \{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2\}$$

und

$$\sin^2\varphi''_1 = \sin^2\varphi \{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2_1\},$$

ist, so erhält man $$\frac{\sin^2\varphi''-\sin^2\varphi'}{1-\gamma''^2}=\frac{\sin^2\varphi''_1-\sin^2\varphi'}{1-\gamma''^2_1}$$
oder, nachdem man für γ'' seinen Werth $C\cos\varphi''+A\sin\varphi''\cos w$ und für γ''_1 seinen Werth $C\cos\varphi''_1-A\sin\varphi''_1\cos w$ gesetzt hat,
$$\frac{\sin^2\varphi''-\sin^2\varphi'}{1-(C\cos\varphi''+A\sin\varphi''\cos w)^2}=\frac{\sin^2\varphi''_1-\sin^2\varphi'}{1-(C\cos\varphi''_1-A\sin\varphi''_1\cos w)^2};$$
löst man die Quadrate auf und bringt die Glieder auf gleiche Nenner, so findet man unmittelbar die vorstehende Gleichung, deren Richtigkeit erwiesen werden sollte.

Die Behandlung der 4 linearen Hauptgleichungen, um daraus die erforderlichen Resultate zu ziehen, stimmt mit dem vorigen Falle fast ganz überein. Eliminirt man R' und R'', so erhält man zunächst
$$S''\sin(\varphi+\varphi')=D''\cos x''\sin(\varphi'+\varphi'')-R''\cos x''_1\sin(\varphi'-\varphi''_1),\quad(61)$$
$$S''\sin(\varphi+\varphi''_1)=D''\cos x''\sin(\varphi''+\varphi''_1)-R'\cos x'_1\sin(\varphi'-\varphi''_1),\quad(62)$$
$$P''(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$=D''\sin x''(\sin\varphi'\cos\varphi'+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')-R''\sin x''_1(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1),\quad(63)$$
$$P''(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1)$$
$$=D''\sin x''(\beta''\sin\varphi''\cos\varphi''+\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1)+R'\sin x'_1(\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1).\quad(64)$$
Hieraus kann man leicht R' und R'' fortschaffen, um die vollständigen Formeln für S'' und P'' zu erhalten; doch um nicht zu weit zu gehen, will ich nur die annähernden Formeln geben. Man setze daher wieder $\varphi'=\varphi''=\varphi''_1$, wodurch $\beta''=\beta''_1=1$ wird, so erhält man
$$P''=\frac{D''\sin x''\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')},\quad(65)$$
$$S''=\frac{D''\cos x''\sin 2\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')},\quad(66)$$
und $$\frac{P''}{S''}\text{ oder }\tang\alpha''=\frac{\tang x''}{\cos(\varphi-\varphi')}.\quad(67)$$
Eliminirt man zweitens aus den Hauptgleichungen S'' und P'', so bekommt man aus (a'') und (b'')
$$0=D''\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')+R'\cos x'_1\sin(\varphi+\varphi')-R''\cos x''_1\sin(\varphi+\varphi''_1),\quad(68)$$
ebenso aus (c'') und (d'')
$$0=D''\sin x''(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')-R'\sin x'_1(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$-R''\sin x''_1(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1);\quad(69)$$
aus beiden zusammen zieht man
$$R'=\frac{1}{N_1}D''[\cos x''\sin x''_1\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1)$$
$$-\sin x''\cos x''_1\sin(\varphi+\varphi''_1)(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')],\quad(70)$$
und
$$R''=-\frac{1}{N_1}D''[\cos x''\sin x'_1\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$+\sin x''\cos x'_1\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')],\quad(71)$$
Soll der gewöhnlich reflectirte Strahl verschwinden, so mufs
$$\cos x''\sin x''_1\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1)$$
$$=\sin x''\cos x''_1\sin(\varphi+\varphi''_1)(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')=0$$

sein, und diese Bedingungsgleichung geht nach Substitution der Werthe für die eingeführten Gröfsen über in

$$A \sin w (C \cos \varphi - A \sin \varphi \cos w) = 0. \quad (72)$$

Aus dieser Formel lassen sich dieselben Schlüsse wie im obigen Falle für das Verschwinden der ungewöhnlichen Welle ziehen, nämlich dafs die Welle in drei Fällen verschwindet, wenn $A = 0$, wenn $w = 0$ und wenn $C \cos \varphi - A \sin \varphi \cos w = 0$ ist. Die ungewöhnlich reflectirte Welle verschwindet, sobald

$$\cos x'' \sin x'_1 \sin (\varphi - \varphi'') (\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi' \cos \varphi')$$
$$+ \sin x'' \cos x'_1 \sin (\varphi + \varphi') (\sin \varphi \cos \varphi - \beta'' \sin \varphi'' \cos \varphi'') = 0 \quad (73)$$

wird; allein diese Gleichung bietet kein übersichtliches Resultat dar. Was ferner das Azimuth α'' des heraustretenden Strahls betrifft, so erhält man für den Fall, dafs R'' verschwindet,

$$\tan \alpha'' = \frac{P''}{S''} = \frac{\tan x'}{\cos (\varphi - \varphi')}, \quad (74)$$

und für den Fall, dafs R' verschwindet

$$\tan \alpha'' = \frac{P''}{S''} = \tan x'' \frac{(\beta'' \sin \varphi'' \cos \varphi'' + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''_1) \sin (\varphi + \varphi''_1)}{(\sin \varphi \cos \varphi + \beta''_1 \sin \varphi''_1 \cos \varphi''_1) \sin (\varphi'' + \varphi''_1)}. \quad (75)$$

Endlich erhält man noch zu (70) und (71) als abgekürzte Werthe für R' und R'' die beiden Gleichungen

$$R' = \frac{D'' \sin (\varphi - \varphi')}{\sin (\varphi + \varphi') \cos (\varphi - \varphi')} [\sin x'' \cos x''_1 \cos (\varphi + \varphi') - \cos x'' \sin x''_1 \cos (\varphi - \varphi')], \quad (76)$$

$$R'' = \frac{D'' \sin (\varphi - \varphi')}{\sin (\varphi + \varphi') \cos (\varphi - \varphi')} [\sin x'' \cos x'_1 \cos (\varphi + \varphi') + \cos x'' \sin x'_1 \cos (\varphi - \varphi')]. \quad (77)$$

§. XV.

Ueber den Einflufs der Oberflächen zweiaxiger Crystalle auf das reflectirte und gebrochene Licht.

1. Die Untersuchung über die Gesetze, welche die Modification des von der Oberfläche zweiaxiger Crystalle reflectirten und gebrochenen Lichtes bedingen, stimmt fast ganz mit derjenigen überein, welche wir so eben für die einaxigen Crystalle beendet haben. Der einzige Unterschied liegt darin, dafs die Bestimmung der zur Abkürzung der Formeln eingeführten Gröfsen x', x'', β'' u. s. w. hier zusammengesetztere Gleichungen erfordert, dafs aufserdem auch der gewöhnlich gebrochene Strahl in seiner Richtung einem ebenso complicirten Gesetze folgt, als der ungewöhnliche, und dafs dadurch die Berechnung der gefundenen Gleichungen weit gröfsere Schwierigkeiten bietet. Tragen wir übrigens alle Bezeichnungen, welche vorher bei einaxigen Crystallen galten, unverändert auf die zweiaxigen über, so sind die 4 Hauptgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
(S + R_s) \sin \varphi &= D' \cos x' \sin \varphi' + D'' \cos x'' \sin \varphi'', \\
(S - R_s) \cos \varphi &= D' \cos x' \cos \varphi' + D'' \cos x'' \cos \varphi'', \\
P + R_p &= D' \sin x' + D'' \sin x'', \\
(S^2 + P^2) M &= (R_s^2 + R_p^2) M + D'^2 m' + D''^2 m''.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Herleitung der den eingeführten Gröſsen entsprechenden Werthe entnehmen wir aus Fig. 42., die zugleich für die Zeichen als Norm gelten mag. Bezeichnet hier N die Normale zur brechenden Ebene, A und A' die Lage der optischen Axen, P der Axe π des Crystalls, O die Normale zur gewöhnlich gebrochenen, E die Normale zur ungewöhnlich gebrochenen Wellenebene, und somit NF die Lage der Einfallsebene, so geht nach dem, was in den früheren Paragraphen aus einander gesetzt wurde, die Polarisationsrichtung des gewöhnlichen Strahls nach Oo, welche Linie den Winkel AOA' halbirt und man hat das Azimuth der Polarisationsrichtung dieses Strahls oder $\angle x' = \angle oOF$. Halbirt Ee ebenfalls den Winkel AEA', so liegt die Polarisationsrichtung des ungewöhnlich gebrochenen Strahls senkrecht gegen Ee nach Ee', und man hat $\angle x'' = \angle e'EF$. Wie man sieht, haben $\cos x'$ und $\cos x''$ wieder entgegengesetzte Zeichen, wir wollen demnach $\angle oOF$ mit $\angle oON$ vertauschen, und gleich in die Grundformeln (1) statt $\cos x'$ seinen Werth $-\cos x'$ setzen. Um die Winkel x' und x'' zu bestimmen, nehmen wir an, daſs AO, $A'O$ und $\angle AOA'$ ebenso AE, $A'E$ und $\angle AEA'$ gegeben sind, denn sie können nach den von §. IX. ab entwickelten Formeln aus der Lage der Normale N gegen A und A', aus $AA' = 2n$, $NO = \varphi'$, $NE = \varphi''$ und aus dem Azimuth w der Einfallsebene gegen NP bestimmt werden. Wir setzen ferner, um zwischen dem gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl einen Unterschied zu machen, $AO = u$, $A'O = u'$, $\angle AOo = j$, $AE = v$, $A'E = v'$ und $\angle AEe = k$; dann finden wir den Winkel x' oder $\angle NOo = \angle NOA + j$, worin $\angle NOA$ aus dem $\triangle NAO$ und $\angle j$ aus der Gleichung

$$\sin^2 j = \frac{\sin^2 n - \sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}{\sin u \sin u'} \quad \text{oder} \quad \cos^2 j = \frac{\sin^2\left(\frac{u+u'}{2}\right) - \sin^2 n}{\sin u \sin u'}$$

folgt; auf gleiche Weise erhält man $x'' = 90^0 - (NEA + k)$, und wieder $\angle NEA$ aus $\triangle NEA$, $\angle k$ aus der Gleichung

$$\sin^2 k = \frac{\sin^2 n - \sin^2\left(\frac{v-v'}{2}\right)}{\sin v \sin v'} \quad \text{oder} \quad \cos^2 k = \frac{\sin^2\left(\frac{v+v'}{2}\right) - \sin^2 n}{\sin v \sin v'}.$$

Eine vollständigere Entwicklung der Ausdrücke für x' und x'' kann wenig nützen, da man sie bequemer für specielle Fälle anstellt. — Zweitens in Betreff der durch die verschiedenen Strahlen in gleicher Zeit erregten Aethermassen, so haben sie auch hier eine gleiche Breite, genommen in senkrechter Richtung zur Einfallsebene; ihre Tiefen verhalten sich wie die Schnelligkeit der Strahlen, also wie $\sin\varphi : \sin\varphi' : \sin\varphi''$ und ihre Länge wie $\cos\varphi : \cos\varphi' - \sin\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x' : \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$. Denn nach dem, was früher auseinander gesetzt wurde, schlieſst der gewöhnliche Strahl mit der zu seiner Wellenebene Normalen den Winkel q' ein, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} q' = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin\left(\frac{u-u'}{2}\right)\cos\left(\frac{u-u'}{2}\right)\sin j}{\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u-u'}{2}\right)}$$

gegeben wird; er entfernt sich von ihr in der zu Oo senkrechten Ebene abwärts von P, und steht also nach einem Fortrücken der Wellenebene $= \sin\varphi'$ um eine Strecke $= \sin\varphi' \operatorname{tang} q'$ von der Normale ab; dies giebt eine Verkürzung in der nach NF gemessenen Länge des erregten Aethers $= \sin\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'$, so daſs die Länge überhaupt $= \cos\varphi' - \sin\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x'$ wird. Ein ganz

ähnliches Verhältniſs findet bei dem ungewöhnlichen Strahle statt; er entfernt sich in der Ebene durch Ee abwärts von P von der zu seiner Wellenebene Normalen unter einem Winkel q'', für welchen

$$\operatorname{tang} q'' = \frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin\left(\frac{v+v'}{2}\right)\cos\left(\frac{v+v'}{2}\right)\cos k}{\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{v+v'}{2}\right)}$$

ist; dadurch entsteht eine Verkürzung in der Länge des erregten Aethers von $\sin\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$, und die Länge selbst wird $= \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$. Wir erhalten also für die Massen M, m', m'' das Verhältniſs $\sin\varphi \cos\varphi : \sin\varphi' \cos\varphi' - \sin^2\varphi' \operatorname{tang} q' \sin x' : \sin\varphi'' \cos\varphi'' - \sin^2\varphi'' \operatorname{tang} q'' \sin x''$, welches Verhältniſs wir durch $\sin\varphi\cos\varphi : \sin\varphi'\cos\varphi'(\cos^2 x' + \beta' \sin^2 x') : \sin\varphi''\cos\varphi''(\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'')$ ausdrücken wollen, indem wir

$$\beta' = \frac{\sin x' \cos\varphi' - \sin\varphi' \operatorname{tang} q'}{\sin x' \cos\varphi'}, \qquad (2)$$

und

$$\beta'' = \frac{\sin x'' \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \operatorname{tang} q''}{\sin x'' \cos\varphi''} \qquad (3)$$

setzen. Nach diesen Angaben ändern sich die Gleichungen (1) in folgende um:

$$(S + R_s)\sin\varphi = -D' \cos x' \sin\varphi' + D'' \cos x'' \sin\varphi'', \qquad (a)$$

$$(S + R_s)\cos\varphi = -D' \cos x' \cos\varphi' + D'' \cos x'' \cos\varphi'', \qquad (b)$$

$$P + R_p = D' \sin x' + D'' \sin x'', \qquad (c)$$

$$(S^2 + P^2 - R_s^2 - R_p^2)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= D'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' (\cos^2 x' + \beta' \sin^2 x') + D''^2 \sin\varphi'' \cos\varphi'' (\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'').$$

Multiplicirt man (a) und (b) mit einander, und zieht das Product von der vierten Gleichung ab, so bleibt

$$(P^2 - R_p^2)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$= D'^2 \sin^2 x' \beta' \sin\varphi' \cos\varphi' + D''^2 \sin^2 x'' \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'' + D'D'' \cos x' \cos x'' \sin(\varphi' + \varphi'');$$

wird diese Gleichung mit (c) dividirt, so entsteht die letzte lineare Hauptgleichung, nämlich

$$(P - R_p)\sin\varphi\cos\varphi = D' \sin x' \beta' \sin\varphi' \cos\varphi' + D'' \sin x'' \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'', \qquad (d)$$

vorausgesetzt, daſs die angenommene Relation

$$\sin x' \sin x'' (\beta' \sin\varphi' \cos\varphi' + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') = \cos x' \cos x'' \sin(\varphi' + \varphi'')$$

richtig ist. Um dies zu erweisen, setze man hierin für β' seinen Werth $1 - \frac{\sin\varphi' \operatorname{tang} q'}{\sin x' \cos\varphi'}$ oder nach Entfernung von $\operatorname{tang} q'$ seinen Werth $1 - \frac{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\sin(u - u')\sin j \sin\varphi'}{\sin x' \cos\varphi'\, o^2}$, worin o^2 in der frühern Bedeutung genommen ist, ebenso für β'' seinen Werth $1 - \frac{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\sin(v + v')\cos k \sin\varphi''}{\sin x'' \cos\varphi''\, e^2}$, dadurch geht die Relation in folgende über:

$$\sin x' \sin x'' \sin(\varphi' + \varphi'')\cos(\varphi' - \varphi'') - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2}\sin^2\varphi\,[\sin x' \sin(v + v')\cos k + \sin x'' \sin(u - u')\sin j]$$
$$= \cos x' \cos x'' \sin(\varphi' + \varphi''). \qquad (4)$$

Da aber $\frac{\sin^2\varphi'}{o^2} = \frac{\sin^2\varphi''}{e^2} = \sin^2\varphi$ ist, so erhält man $\sin^2\varphi'' - \sin^2\varphi'$ oder $-\sin(\varphi' - \varphi'')\sin(\varphi' + \varphi'')$

$= (e^2 - o^2) \sin^2\varphi$, wofür man nach §. IX. (18) und (25) auch $\frac{\pi^2 - \mu^2}{2}[\cos(u - u') - \cos(v + v')] \sin^2\varphi$ setzen kann. Nimmt man in (4) auch diese Substitution auf, so bleibt zu beweisen, dafs

$$\frac{\sin x' \sin(v + v') \cos k + \sin x'' \sin(u - u') \sin j}{\cos(u - u') - \cos(v + v')} \sin(\varphi' - \varphi'')$$
$$= \cos x' \cos x'' - \sin x' \sin x'' \cos(\varphi' - \varphi'') \quad (5)$$

ist. Die Betrachtung der Fig. 42. giebt

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} u \sin(\varphi'' - \varphi') &= \operatorname{tang}(x'' + k) \sin(x' - j) - \cos(x' - j) \cos(\varphi'' - \varphi'),\\
\operatorname{cotg} v \sin(\varphi'' - \varphi') &= - \operatorname{cotg}(x' - j) \cos(x'' + k) + \sin(x'' + k) \cos(\varphi'' - \varphi'),\\
\operatorname{cotg} u' \sin(\varphi'' - \varphi') &= \operatorname{tang}(x'' - k) \sin(x' + j) - \cos(x' + j) \cos(\varphi'' - \varphi'),\\
\operatorname{cotg} v' \sin(\varphi'' - \varphi') &= - \operatorname{cotg}(x' + j) \cos(x'' - k) + \sin(x'' - k) \cos(\varphi'' - \varphi').
\end{aligned}$$

Addirt man von diesen Gleichungen die zweite und vierte, so kommt

$$\frac{\sin(v + v') \sin(\varphi'' - \varphi')}{\sin v \sin v'}$$
$$= 2\left[\frac{\sin x'' \sin j \cos j \sin k - \sin x' \cos x' \cos x'' \cos k}{\sin(x' + j) \sin(x' - j)} + \sin x'' \cos k \cos(\varphi'' - \varphi')\right], \quad (6)$$

und zieht man die erste von der dritten ab, so bleibt

$$\frac{\sin(u - u') \sin(\varphi'' - \varphi')}{\sin u \sin u'}$$
$$= 2\left[\frac{\sin x'' \cos x'' \cos x' \sin j - \sin x' \sin k \cos k \cos j}{\cos(x'' + k) \cos(x'' - k)} + \sin x' \sin j \cos(\varphi'' - \varphi')\right]. \quad (7)$$

Ferner giebt die Betrachtung derselben Figur, wenn man $\angle OAE = \alpha$ und $\angle OA'E = \alpha'$ setzt,

$$\sin\alpha \sin v = \sin(x' - j) \sin(\varphi'' - \varphi'),$$
$$\sin\alpha \sin v' = \sin(x' + j) \sin(\varphi'' - \varphi'),$$

und daraus
$$\sin(x' + j) \sin(x' - j) = \frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin^2(\varphi'' - \varphi')} \sin v \sin v'; \quad (8)$$

ebenso

$$\sin\alpha \sin u = \cos(x'' + k) \sin(\varphi'' - \varphi'),$$
$$\sin\alpha' \sin u' = \cos(x'' - k) \sin(\varphi'' - \varphi'),$$

und daraus

$$\cos(x'' + k) \cos(x'' - k) = \frac{\sin\alpha \sin\alpha'}{\sin^2(\varphi'' - \varphi')} \sin u \sin u'. \quad (9)$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (6) mit $\sin x' \cos k$, die Gleichung (7) mit $\sin x'' \sin j$, und addirt sie, so bekommt man mit Berücksichtigung der Werthe in (8) und (9)

$$(\sin x' \sin(v + v') \cos k + \sin x'' \sin(u - u') \sin j) \sin(\varphi'' - \varphi')$$
$$= 2\left[\frac{\sin^2(\varphi'' - \varphi')}{\sin\alpha \sin\alpha'} \cos x' \cos x'' (\sin^2 x'' \sin^2 j - \sin^2 x' \cos^2 k)\right.$$
$$\left. + \sin x' \sin x'' \cos(\varphi'' - \varphi') \{\sin v \sin v' \cos^2 k + \sin u \sin u' \sin^2 j\}\right]. \quad (10)$$

Wir wissen aber, dafs

$$\cos 2n = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos 2j \quad \text{oder}$$
$$= \cos(u - u') - 2 \sin u \sin u' \sin^2 j$$

ist, und ebenfalls wegen (9)

$$\cos 2n = \cos(u-u') - 2\,\frac{\sin^2(\varphi''-\varphi')}{\sin\alpha\,\sin\alpha'}\,(\cos^2 k - \sin^2 x'')\sin^2 j.$$

Auf dieselbe Weise ist

$$\cos 2n = \cos(v+v') + 2\sin v\,\sin v'\cos^2 k$$

und auch wegen (8)

$$\cos 2n = \cos(v+v') + 2\,\frac{\sin^2(\varphi''-\varphi')}{\sin\alpha\,\sin\alpha'}\,(\sin^2 x' - \sin^2 j)\cos^2 k.$$

Setzt man die beiden ersten, und dann die beiden letzten Werthe von $\cos 2n$ einander gleich, so ergeben sich die beiden Formeln

$$2[\sin v\,\sin v'\cos^2 k + \sin u\,\sin u'\sin^2 j] = \cos(u-u') - \cos(v+v'),$$

$$2\,\frac{\sin^2(\varphi''-\varphi')}{\sin\alpha\,\sin\alpha'}\,(\sin^2 x''\sin^2 j - \sin^2 x'\cos^2 k) = -[\cos(u-u') - \cos(v+v')],$$

welche in (10) substituirt nach Umwandlung von $\sin(\varphi''-\varphi')$ in $-\sin(\varphi'-\varphi'')$ und von $\cos(\varphi''-\varphi')$ in $\cos(\varphi'-\varphi'')$ das Resultat liefern

$$\frac{\sin x'\sin(v+v')\cos k + \sin x''\sin(u-u')\sin j}{\cos(u-u') - \cos(v+v')}\sin(\varphi'-\varphi'') = \cos x'\cos x'' - \sin x'\sin x''\cos(\varphi'-\varphi'').$$

Dies ist aber die Relation, deren Richtigkeit wir beweisen wollten.

2. Die vier linearen Hauptgleichungen stimmen in allen ihren Gliedern soweit mit den im vorigen §. behandelten überein, dafs man aus ihnen ohne weitere Mühe die Schwingungsweiten des reflectirten Lichtes herleitet. Man findet, wenn man zur Abkürzung

$$N = \sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta'\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$+ \sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'') \quad (11)$$

einführt,

$$R_s = -\frac{1}{N}\Big\{S\Big[\sin x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta'\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$+\sin x''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\Big] + 2P\cos x'\cos x''\sin\varphi\cos\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')\Big\}, \quad (12)$$

$$R_p = \frac{1}{N}\Big\{P\Big[\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi - \beta'\sin\varphi'\cos\varphi')$$
$$+\sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\Big]$$
$$+2S\sin x'\sin x''\sin\varphi\cos\varphi(\beta'\sin\varphi'\cos\varphi' - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\Big\}. \quad (13)$$

In diesen allgemeinen Ausdrücken bieten die Gleichungen viele Schwierigkeiten bei der Berechnung dar; es scheint daher wohl passend, noch besonders auf die einfacheren Fälle hinzudeuten, welche schon §. XI. 4. in Betreff der Strahlenbrechung einzeln erläutert wurden.

a) In dem Falle, dafs die Einfallsebene den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, ist

$$\sin x' = 0, \quad \cos x' = 1, \quad \sin x'' = 1, \quad \cos x'' = 0,$$

$$\operatorname{tang} q' = 0, \quad \operatorname{tang} q'' = \pm\frac{(\pi^2-\nu^2)\sin(\varphi''-\delta)\cos(\varphi''-\delta)}{\pi^2-(\pi^2-\nu^2)\cos^2(\varphi''-\delta)},$$

$$\beta' = 1, \quad \beta'' = 1 \mp \frac{\operatorname{tang} q''\sin\varphi''}{\cos\varphi''},$$

daher erhält man

$$R_s = -S\,\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')},$$

$$R_p = P\,\frac{\sin(\varphi-\varphi'')\cos(\varphi+\varphi'') \pm \operatorname{tang} q''\sin^2\varphi''}{\sin(\varphi+\varphi'')\cos(\varphi-\varphi'') \mp \operatorname{tang} q''\sin^2\varphi''}.$$

b) Wenn die Einfallsebene den stumpfen Winkel der optischen Axen halbirt, hat man

$$\sin x' = 1,\ \cos x' = 0,\ \sin x'' = 0,\ \cos x'' = 1,\ \operatorname{tang} q' = \pm \frac{(\nu^2 - \mu^2)\sin(\varphi' - \delta)\cos(\varphi' - \delta)}{\mu^2 + (\nu^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi' - \delta)},$$

$$\operatorname{tang} q'' = 0, \qquad \beta' = 1 \pm \frac{\operatorname{tang} q' \sin\varphi'}{\cos\varphi'}, \qquad \beta'' = 1,$$

folglich

$$R_s = -S\frac{\sin(\varphi - \varphi'')}{\sin(\varphi + \varphi'')},$$

$$R_p = P\frac{\sin(\varphi - \varphi')\cos(\varphi + \varphi') \mp \operatorname{tang} q' \sin^2\varphi'}{\sin(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi') \pm \operatorname{tang} q' \sin^2\varphi'}.$$

c) Liegt die Einfallsebene in der Ebene der optischen Axen, so müssen wir auch hier die beiden Fälle unterscheiden, welche oben durch (α) und (β) von einander gesondert wurden. In dem Falle (α) nämlich, wo die Normale zur gebrochenen Wellenebene in den stumpfen Winkel der optischen Axen trifft, ist

$$\sin x' = 0, \quad \cos x' = 1, \quad \sin x'' = 1, \quad \cos x'' = 0, \quad \operatorname{tang} q' = 0,$$

$$\operatorname{tang} q'' = \pm \frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin(\varphi'' - \delta)\cos(\varphi'' - \delta)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta)} \qquad \beta' = 1, \qquad \beta'' = 1 \mp \frac{\operatorname{tang} q'' \sin\varphi''}{\cos\varphi''},$$

und die Formeln für R_s und R_p sind dieselben, wie unter (a). Wenn dagegen (β) die Normale in den spitzen Winkel der optischen Axen trifft, so wird

$$\sin x' = 1,\ \cos x' = 0,\ \sin x'' = 0,\ \cos x'' = 1,\ \operatorname{tang} q' = \pm \frac{(\pi^2 - \mu^2)\sin(\varphi'' - \delta)\cos(\varphi'' - \delta)}{\pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\cos^2(\varphi'' - \delta)},$$

$$\operatorname{tang} q'' = 0, \qquad \beta' = 1 \mp \frac{\operatorname{tang} q' \sin\varphi'}{\cos\varphi'}, \qquad \beta'' = 1,$$

und R_s und R_p erhalten dieselben Werthe wie in (b).

d) Der zuletzt behandelte Fall, wo das gebrochene Licht die conische Brechung erleidet, scheint zuerst um deswillen schwierig zu sein, weil das gebrochene Licht nach allen Richtungen Schwingungen vollenden kann, und es somit das Ansehen gewinnt, als wären hier nicht zwei besondere Strahlen zu unterscheiden, wie es doch die Formeln für das reflectirte Licht erheischen. Allein läfst man die gebrochenen Strahlen nach und nach in die Richtung der optischen Axen gelangen, und achtet man darauf, welche Polarisationsrichtung ihnen eben bei diesem Uebergange von der doppelten in die conische Brechung zukommt, so wird man sich ohne weitere Mühe überzeugen, dafs man auch hier noch die Schwingungsrichtungen der beiden Strahlen wohl zu unterscheiden und in die obigen Formeln

$$\sin x' = \sin\frac{w}{2}, \quad \cos x' = \cos\frac{w}{2}, \quad \sin x'' = \cos\frac{w}{2}, \quad \cos x'' = \sin\frac{w}{2}, \quad \varphi' = \varphi'',$$

$$\operatorname{tang} q' = -\frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \sin\frac{w}{2}, \qquad \operatorname{tang} q'' = \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \cos\frac{w}{2},$$

$$\beta'' = 1 + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}, \qquad \beta'' = 1 - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n \frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'}$$

zu setzen habe. Demgemäfs erhält man für die Schwingungsweiten des reflectirten Lichtes

$$R_s = -S\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')},$$

$$R_p = \frac{\left\{\begin{array}{c} P\sin(\varphi+\varphi')\left[\sin(\varphi-\varphi')\cos(\varphi+\varphi')+\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos w\right] \\ +2S\sin\varphi\cos\varphi\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\sin w \end{array}\right\}}{\sin(\varphi+\varphi')\left\{\sin(\varphi+\varphi')\cos(\varphi-\varphi')-\frac{\pi^2-\mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\sin^2\varphi'\cos w\right\}}.$$

Nach Betrachtung dieser besondern Fälle bestimmen wir nach den beiden allgemeinen Gleichungen (12) und (13) den Winkel des Polarisationsmaximums. Grade wie bei der Reflexion von einaxigen Crystallen enthält auch hier sowohl das mit R_s als das mit R_p bezeichnete reflectirte Licht Strahlen, die zu S und P im einfallenden Lichte gehören; bei der Reflexion werden diese wieder nach den Gesetzen des polarisirten Lichtes zusammenwirken und zwei Lichtbündel geben, die in Azimuthen $= x_s$ und x_p polarisirt sind. Setzt man beide Winkel einander gleich, so ist das reflectirte Licht überhaupt polarisirt, und wir erhalten dadurch die Bedingungsgleichung für den Winkel φ des sogenannten Polarisationsmaximums. Diese Bedingungsgleichung ist nun:

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x'\cos^2 x''\sin(\varphi-\varphi'')\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\\
&+\sin^2 x''\cos^2 x'\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')\\
&+\sin x'\sin x''\cos x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')\\
&+\sin x'\sin x''\cos x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi')\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')\\
&=4\sin x'\sin x''\cos x'\cos x''\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sin(\varphi'-\varphi'')(\beta'\sin\varphi'\cos\varphi'-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'').
\end{aligned}$$

Nach meheren Reductionen, die im Ganzen mit dem Verfahren im vorigen §. übereinstimmen, trennt sich diese Gleichung in die beiden Factoren

$$\begin{aligned}
&[\sin x'\cos x''\sin(\varphi+\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')+\sin x''\cos x'\sin(\varphi+\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi+\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')]\\
&\times[\sin x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')+\sin x''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'')]\\
&=0.
\end{aligned}$$

Allein auch hier kann nur der letzte Factor $= 0$ werden, deshalb ist die allgemeine Gleichung für den Winkel des Polarisationsmaximums

$$\sin x'\cos x''\sin(\varphi-\varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta'\sin\varphi'\cos\varphi')+\sin x''\cos x'\sin(\varphi-\varphi')(\sin\varphi\cos\varphi-\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'') = 0. \quad (14)$$

In den besonders günstigen Lagen der Reflexionsebene, welche wir kurz zuvor betrachtet haben, läſst sich diese Gleichung bequem gestalten. So ist für den Fall (a), wie wir gesehen haben, $\sin x' = 0$, $\cos x' = 1$ u. s. w.; daher folgt für den Winkel des Polarisationsmaximums

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\pi^2\sin\varphi''\cos\varphi''-(\pi^2-\nu^2)\sin\varphi''\cos\varphi''\cos^2(\varphi''-\delta)-(\pi^2-\nu^2)\sin(\varphi''-\delta)\cos(\varphi''-\delta)\sin^2\varphi''}{\pi^2-(\pi^2-\nu^2)\cos^2(\varphi''-\delta)};$$

setzt man hierin aus

$$\sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\{\pi^2-(\pi^2-\nu^2)\cos^2(\varphi''-\delta)\}, \qquad (m)$$

$$\pi^2-(\pi^2-\nu^2)\cos^2(\varphi''-\delta) = \frac{\sin^2\varphi''}{\sin^2\varphi},$$

so wird

$$\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi'' = \sin^2\varphi[\pi^2\cos\varphi''-(\pi^2-\nu^2)\cos^2\delta\cos\varphi''-(\pi^2-\nu^2)\sin\varphi''\sin\delta\cos\delta], \quad (n)$$

oder

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{\sin\varphi\,[\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2\delta]}{\cos\varphi + (\pi^2 - \nu^2)\sin\varphi\,\sin\delta\cos\delta}. \quad (o)$$

Ferner folgt aus (m)

$$\operatorname{tang}^2\varphi'' =$$

$$\sin^2\varphi\,\{\pi^2 + \pi^2\operatorname{tang}^2\varphi'' - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2\delta - 2(\pi^2 - \nu^2)\operatorname{tang}\varphi''\sin\delta\cos\delta - (\pi^2 - \nu^2)\operatorname{tang}^2\varphi''\sin^2\delta\},$$

substituirt man hierin aus (n)

$$\sin^2\varphi\,\{\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2\delta - (\pi^2 - \nu^2)\operatorname{tang}\varphi''\sin\delta\cos\delta\} = \sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tang}\varphi'',$$

so erhält man

$$\operatorname{tang}^2\varphi'' =$$

$$\sin\varphi\cos\varphi\operatorname{tang}\varphi'' + \sin^2\varphi\,\{\pi^2\operatorname{tang}^2\varphi'' - (\pi^2 - \nu^2)\operatorname{tang}\varphi''\sin\delta\cos\delta - (\pi^2 - \nu^2)\operatorname{tang}^2\varphi''\sin^2\delta\},$$

oder

$$\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{\sin\varphi\cos\varphi - (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\sin\delta\cos\delta}{1 - \pi^2\sin^2\varphi + (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\sin^2\delta}. \quad (p)$$

Man setze jetzt die beiden Werthe von $\operatorname{tang}\varphi''$ in (o) und (p) einander gleich, so bekommt man

$$\frac{\pi^2 - (\pi^2 - \nu^2)\cos^2\delta}{\cos\varphi + (\pi^2 - \nu^2)\sin\varphi\sin\delta\cos\delta} = \frac{\cos\varphi - (\pi^2 - \nu^2)\sin\varphi\sin\delta\cos\delta}{1 - \pi^2\sin^2\varphi + (\pi^2 - \nu^2)\sin^2\varphi\sin^2\delta},$$

und daraus

$$\sin^2\varphi = \frac{(1 - \nu^2)\cos^2\delta + (1 - \pi^2)\sin^2\delta}{1 - \pi^2\nu^2}.$$

In dem zweiten Falle (b) war $\sin x' = 1$, $\cos x' = 0$ u. s. w. Geht man auch hier ganz denselben Gang durch, so findet man

$$\sin^2\varphi = \frac{(1 - \nu^2)\cos^2\delta + (1 - \mu^2)\sin^2\delta}{1 - \mu^2\nu^2}.$$

Ebenso läfst sich der dritte Fall (c) behandeln; in seinen beiden Unterabtheilungen (α) und (β) wird der Winkel des Polarisationsmaximums durch

$$\sin^2\varphi = \frac{(1 - \mu^2)\cos^2\delta + (1 - \pi^2)\sin^2\delta}{1 - \pi^2\mu^2}$$

gegeben.

Der letzte Fall (d) endlich, wenn die conische Brechung eintritt, giebt

$$\sin x' = \sin\frac{w}{2}, \quad \cos x' = \cos\frac{w}{2}, \quad \sin x'' = \cos\frac{w}{2}, \quad \cos x'' = \sin\frac{w}{2},$$

$$\beta' = 1 + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\,\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'} \quad \text{und} \quad \beta'' = 1 - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2}\sin 2n\,\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'},$$

demnach bestimmt man den Winkel des Polarisationsmaximums durch

$$\sin^2\frac{w}{2}(\sin\varphi\cos\varphi - \beta'\sin\varphi'\cos\varphi') + \cos^2\frac{w}{2}(\sin\varphi\cos\varphi - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'') = 0,$$

oder nach Substitution der Werthe für β' und β'', und nachdem man für $\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi'\cos\varphi'$ seinen Werth $\cos(\varphi + \varphi')\cos(\varphi - \varphi')$ oder $1 - (1 + \nu^2)\sin^2\varphi$ gesetzt hat, durch

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{1 + \nu^2} + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2(1 + \nu^2)}\sin 2n\sin^2\varphi\operatorname{cotg}(\varphi - \varphi')\cos w.$$

Die allgemeine Gleichung (**14**) bietet für eine vollständige Lösung zu grofse Schwierigkeiten dar, als dafs wir uns nicht mit einer solchen Umgestaltung derselben begnügen sollten, welche eine

annähernde Berechnung möglich macht. Zu diesem Behufe substituire man zunächst in dieselbe die Werthe von β' und β'', nämlich

$$\beta' = 1 - \frac{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(u - u') \sin j \sin^2\varphi}{\sin x' \sin\varphi' \cos\varphi'},$$

$$\beta'' = 1 - \frac{\frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin(v + v') \cos k \sin^2\varphi}{\sin x'' \sin\varphi'' \cos\varphi''};$$

dann erhält man

$$\sin x' \cos x'' \sin(\varphi - \varphi'') \sin(\varphi - \varphi') \cos(\varphi + \varphi') + \sin x'' \cos x' \sin(\varphi - \varphi') \sin(\varphi - \varphi'') \cos(\varphi + \varphi')$$
$$+ \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin^2\varphi \left\{\cos x' \sin(\varphi - \varphi') \sin(v + v') \cos k + \cos x'' \sin(\varphi - \varphi'') \sin(u - u') \sin j\right\} = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\cos(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi'')$ und schreibt für $\cos(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi')$ seinen Werth $1 - (1 + o^2)\sin^2\varphi$, für $\cos(\varphi + \varphi'')\cos(\varphi - \varphi'')$ seinen Werth $1 - (1 + e^2)\sin^2\varphi$, so wird

$$\sin x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')[1 - (1 + o^2)\sin^2\varphi] + \sin x'' \cos x' \cos(\varphi - \varphi')[1 - (1 + e^2)\sin^2\varphi]$$
$$+ \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \sin^2\varphi \cos(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi'') \left\{\frac{\cos x' \sin(v + v') \cos k}{\sin(\varphi - \varphi'')} + \frac{\cos x'' \sin(u - u') \sin j}{\sin(\varphi - \varphi')}\right\} = 0,$$

folglich

$$\sin^2\varphi = \frac{\sin x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'') + \sin x'' \cos x' \cos(\varphi - \varphi')}{\sin x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')(1 + o^2) + \sin x'' \cos x' \cos(\varphi - \varphi')(1 + e^2)}$$
$$- \frac{\pi^2 - \mu^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\varphi \cos(\varphi - \varphi') \cos(\varphi - \varphi'')}{\sin x' \cos x'' \cos(\varphi - \varphi'')(1 + o^2) + \sin x'' \cos x' \cos(\varphi - \varphi')(1 + e^2)}$$
$$\times \left\{\frac{\cos x' \sin(v + v') \cos k}{\sin(\varphi - \varphi'')} + \frac{\cos x'' \sin(u - u') \sin j}{\sin(\varphi - \varphi')}\right\}. \quad (15)$$

Zur ersten Annäherung setze man $o^2 = e^2 = \frac{\pi^2 + \mu^2}{2}$, und $\sin x' = \cos x''$, $\cos x' = \sin x''$, $\varphi' = \varphi''$, so findet man zunächst $\sin^2\varphi = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 + \mu^2}{2}}$; mit diesem Werthe berechne man genauere Werthe für o^2, e^2, x', x'', φ', φ'' und leite mittelst derselben eine genauere Bestimmung von $\sin^2\varphi$ her. Das so gefundene Resultat wird zur Vergleichung der Berechnung mit den Beobachtungen vollkommen ausreichen.

3. In Betreff des Azimuths α, unter welchem das im Polarisationsmaximum reflectirte Licht polarisirt ist, können wir uns wieder auf die Angaben beziehen, die bei einaxigen Crystallen gemacht wurden. Nach diesen wird

$$\operatorname{tang}\alpha = - \frac{\sin x' \cos x'' \sin(\varphi + \varphi'')(\sin\varphi\cos\varphi - \beta' \sin\varphi' \cos\varphi') + \sin x'' \cos x' \sin(\varphi + \varphi')(\sin\varphi\cos\varphi - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')}{2 \cos x' \cos x'' \sin\varphi \cos\varphi \sin(\varphi' - \varphi'')},$$

Wenn man hierbei die Gleichung (14) berücksichtigt, so reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang} x' (\sin\varphi \cos\varphi - \beta' \sin\varphi' \cos\varphi')}{\sin(\varphi - \varphi')}, \quad (16)$$

oder auf

$$\operatorname{tang}\alpha = - \frac{\operatorname{tang} x'' (\sin\varphi \cos\varphi - \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')}{\sin(\varphi - \varphi'')}. \quad (17)$$

Die Uebereinstimmung dieser Formeln mit den ähnlichen bei einaxigen Crystallflächen springt sogleich in die Augen. — In den bisher betrachteten einfachern Fällen ist $\tang \alpha$ überall $=0$, nur bei der conischen Brechung erhält man

$$\tang \alpha = \tang \frac{w}{2} \left\{ \cos(\varphi + \varphi') - \frac{(\pi^2 - \mu^2) \sin^2 n \sin^2 \varphi'}{2\nu^2 \sin(\varphi - \varphi')} \right\},$$

oder, wenn man für $\cos(\varphi + \varphi')$ seinen dem Polarisationsmaximum entsprechenden Werth setzt,

$$\tang \alpha = - \frac{(\pi^2 - \mu^2) \sin 2n \sin^2 \varphi \sin w}{2 \sin(\varphi - \varphi')}.$$

4. Auch die Formeln, welche die Schwingungsweite und die Intensität des gebrochenen Lichtes bedingen, stimmen soweit mit den im vorigen §. behandelten überein, dafs wir sie ohne weitere Umstände unmittelbar hersetzen können. Wenn

$$N = \sin x' \cos x'' \sin(\varphi + \varphi'')(\sin\varphi \cos\varphi + \beta' \sin\varphi' \cos\varphi') + \sin x'' \cos x' \sin(\varphi + \varphi')(\sin\varphi\cos\varphi + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'')$$

ist, so erhält man

$$D' = \frac{1}{N} \{ P \cos x'' \sin(\varphi + \varphi'') - S \sin x'' (\sin\varphi \cos\varphi + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi'') \} \sin 2\varphi, \quad (18)$$

$$D'' = \frac{1}{N} \{ S \sin x' (\sin\varphi \cos\varphi + \beta' \sin\varphi' \cos\varphi') + P \cos x' \sin(\varphi + \varphi') \} \sin 2\varphi. \quad (19)$$

Ferner folgt das Verhältnifs der Intensitäten beider gebrochenen Strahlen aus der Proportion

$$I' : I'' = D'^2 U' : D''^2 U'', \quad (20)$$

worin $U' = \sin\varphi' \cos\varphi' (\cos^2 x' + \beta' \sin^2 x')$ und $U'' = \sin\varphi'' \cos\varphi'' (\cos^2 x'' + \beta'' \sin^2 x'')$ ist. Verlangt man nur abgekürzte Formeln, so mag man sich derselben bedienen, die oben für einaxige Crystalle abgeleitet wurden. In den besondern Fällen (a) und (c) α, ist übrigens

$$D' = -S \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')}; \qquad D'' = P \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi'') \mp \tang q'' \sin^2 \varphi''};$$

in den Fällen (b) und (c) β

$$D' = S \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') \pm \tang q' \sin^2 \varphi'}; \qquad D'' = S \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi'')}.$$

Wenn endlich die conische Brechung eintritt, reduciren sich die beiden Formeln auf

$$D' = \frac{\left\{ P \sin \frac{w}{2} - S \cos \frac{w}{2} \left(\cos(\varphi - \varphi') - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2 \varphi' \right) \right\} \sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2 \varphi' \cos w},$$

$$D'' = \frac{\left\{ S \sin \frac{w}{2} \left(\cos(\varphi - \varphi') + \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2 \varphi' \right) + P \cos \frac{w}{2} \right\} \sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi') \cos(\varphi - \varphi') - \frac{\pi^2 - \mu^2}{2\nu^2} \sin 2n \sin^2 \varphi' \cos w}.$$

Nimmt man an, dafs das einfallende Licht selbst unter einem Azimuth a polarisirt ist, so hat man bei einer Intensität desselben $=1$, $P \sin a$ und $S \cos a$ zu setzen; im Uebrigen bleiben die Formeln ganz unverändert. Zu bemerken ist etwa noch, dafs bei dieser Annahme D' verschwindet, wenn

$$\tang a = \tang x'' \frac{\sin\varphi \cos\varphi + \beta'' \sin\varphi'' \cos\varphi''}{\sin(\varphi + \varphi'')}$$

ist, dafs dagegen D'' verschwindet, wenn

$$\tan a = -\tan x' \frac{\sin\varphi\cos\varphi + \beta'\sin\varphi'\cos\varphi'}{\sin(\varphi+\varphi')}$$

ist.

5. Wir wenden uns jetzt noch in aller Kürze zur Untersuchung der besondern Umstände, wenn eine gewöhnliche Welle im Innern eines zweiaxigen Crystalls reflectirt wird. Wir haben auch hier wieder den Vortheil, dafs wir uns in allen Dingen auf die Ergebnisse bei einaxigen Medien berufen können; lassen wir daher alle bisher eingeführten Gröfsen in der bisherigen Weise gelten, und führen bei den reflectirten Wellen dem Obigen analoge Bezeichnungen ein, so erhalten wir die zur vollständigen Beantwortung aller Fragen erforderlichen vier Hauptgleichungen:

$$S'\sin\varphi = -D'\cos x'\sin\varphi' - R'\cos x'_1\sin\varphi'_1 + R''\cos x''_1\sin\varphi''_1, \qquad (a')$$

$$S'\cos\varphi = -D'\cos x'\cos\varphi' + R'\cos x'_1\cos\varphi'_1 - R''\cos x''_1\cos\varphi''_1, \qquad (b')$$

$$P' = D'\sin x' - R'\sin x'_1 - R''\sin x''_1,$$

$$(P'^2+S'^2)\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\sin\varphi'\cos\varphi'(\cos^2 x'+\beta'\sin^2 x') - R'^2\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1(\cos^2 x'_1+\beta'_1\sin^2 x'_1)$$
$$- R''^2\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1(\cos^2 x''_1+\beta''_1\sin^2 x''_1).$$

Zieht man das Product der ersten und zweiten Gleichung von der vierten ab, so bleibt

$$P'^2\sin\varphi\cos\varphi = D'^2\sin^2 x'\beta'\sin\varphi'\cos\varphi' - R'^2\sin^2 x'_1\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 - R''^2\sin^2 x''_1\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1$$
$$+ D'R'\cos x'\cos x'_1\sin(\varphi'-\varphi'_1) - D'R''\cos x'\cos x''_1\sin(\varphi'-\varphi''_1) - R'R''\cos x'_1\cos x''_1\sin(\varphi'_1+\varphi''_1),$$

und wird diese Gleichung mit (c) dividirt, so entsteht die vierte lineare Hauptgleichung

$$P'\sin\varphi\cos\varphi = D'\sin x'\beta'\sin\varphi'\cos\varphi' + R'\sin x'_1\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 + R''\sin x''_1\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1, \qquad (d')$$

vorausgesetzt, dafs die folgenden Relationen richtig sind:

$$D'R'\cos x'\cos x'_1\sin(\varphi'-\varphi'_1) = D'R'\sin x'\sin x'_1(\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 - \beta'\sin\varphi'\cos\varphi'),$$

$$D'R''\cos x'\cos x''_1\sin(\varphi'-\varphi''_1) = D'R''\sin x'\sin x''_1(\beta'\sin\varphi'\cos\varphi' - \beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1),$$

$$R'R''\cos x'_1\cos x''_1\sin(\varphi'_1+\varphi''_1) = R'R''\sin x'_1\sin x''_1(\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 + \beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1).$$

Die dritte dieser Relationen ist schon oben erwiesen worden; die beiden übrigen stimmen soweit mit einander überein, dafs es genügt, die Richtigkeit einer derselben zu zeigen. Wir nehmen hierzu die Relation

$$\cos x'\cos x'_1\sin(\varphi'-\varphi'_1) = \sin x'\sin x'_1(\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 - \beta'\sin\varphi'\cos\varphi').$$

Setzt man hierin

$$\beta' = 1 - \frac{\sin\varphi'\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin(u-u')\sin j}{\sin x'\cos\varphi'\,o^2},$$

$$\beta'_1 = 1 - \frac{\sin\varphi'_1\dfrac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin(u_1-u'_1)\sin j_1}{\sin x'_1\cos\varphi'_1\,o_1^2},$$

und berücksichtigt, dafs $\dfrac{\sin^2\varphi'}{o^2} = \dfrac{\sin^2\varphi'_1}{o_1^2} = \sin^2\varphi$ ist, so erhält man

$$\cos x'\cos x'_1\sin(\varphi'-\varphi'_1) = -\sin x'\sin x'_1\sin(\varphi'-\varphi'_1)\cos(\varphi'+\varphi'_1)$$
$$+\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2\varphi\{\sin x'_1\sin(u-u')\sin j - \sin x'\sin(u_1-u'_1)\sin j_1\};$$

ferner ist

$$\sin(\varphi'-\varphi'_1)\sin(\varphi'+\varphi'_1)=\sin^2\varphi'-\sin^2\varphi'_1=(o^2-o_1^2)\sin^2\varphi$$
$$=\frac{\pi^2-\mu^2}{2}\sin^2\varphi\left\{\cos(u_1-u'_1)-\cos(u-u')\right\},$$

dadurch verwandelt sich die aufgestellte Relation in folgende

$$\frac{\sin x'_1\sin(u-u')\sin j-\sin x'\sin(u_1-u'_1)\sin j_1}{\cos(u_1-u'_1)-\cos(u-u')}\sin(\varphi'+\varphi'_1)=\cos x'\cos x'_1+\sin x'\sin x'_1\cos(\varphi'+\varphi'_1).$$

Wenn nun (Fig. 43.) A und A' die optischen Axen bezeichnen, N die Normale zur Reflexionsebene, O, E, O_1, E_1, die Normalen zu den entsprechenden einfallenden und reflectirten Wellenebenen, und man der Kürze halber die Winkel EAO, OAO_1, $EA'O$, $OA'O_1$ mit α, γ, α', γ' benennt, so giebt die Betrachtung der Figur

$$\operatorname{ctg}u'\sin(\varphi'+\varphi'_1)=-\operatorname{ctg}(x'_1+j_1)\sin(x'+j)+\cos(x'+j)\cos(\varphi'+\varphi'_1),$$
$$\operatorname{ctg}u'_1\sin(\varphi'+\varphi'_1)=\operatorname{ctg}(x'+j)\sin(x'_1+j_1)-\cos(x'_1+j_1)\cos(\varphi'+\varphi'_1),$$
$$\operatorname{ctg}u\sin(\varphi'+\varphi'_1)=-\operatorname{ctg}(x'_1-j_1)\sin(x'-j)+\cos(x'-j)\cos(\varphi'+\varphi'_1),$$
$$\operatorname{ctg}u_1\sin(\varphi'+\varphi'_1)=\operatorname{ctg}(x'-j)\sin(x'_1-j_1)-\cos(x'_1-j_1)\cos(\varphi'+\varphi'_1).$$

Aus diesen Gleichungen leitet man die beiden nachfolgenden ab

$$\frac{\sin(u-u')\sin(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin u\sin u'}=2\frac{\sin x'\sin j_1\cos j_1\cos j-\sin x'_1\cos x'_1\cos x'\sin j}{\sin(x'_1+j_1)\sin(x'_1-j_1)}-2\sin x'\sin j\cos(\varphi'+\varphi'_1),$$
$$\frac{\sin(u_1-u'_1)\sin(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin u_1\sin u'_1}=2\frac{\sin x'_1\sin j\cos j\cos j_1-\sin x'\cos x'\cos x'_1\sin j_1}{\sin(x'+j)\sin(x'-j)}-2\sin x'_1\sin j_1\cos(\varphi'+\varphi'_1).$$

Aufserdem ist auch

$$\sin u\sin\gamma=\sin(x'_1-j_1)\sin(\varphi'+\varphi'_1);\qquad \sin u'\sin\gamma'=\sin(x'_1+j_1)\sin(\varphi'+\varphi'_1);$$
$$\sin u_1\sin\gamma=\sin(x'-j)\sin(\varphi'+\varphi'_1);\qquad \sin u'_1\sin\gamma'=\sin(x'+j)\sin(\varphi'+\varphi'_1);$$

also

$$\sin u\sin u'=\sin(x'_1+j_1)\sin(x'_1-j_1)\frac{\sin^2(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin\gamma\sin\gamma'};$$
$$\sin u_1\sin u'_1=\sin(x'+j)\sin(x'-j)\frac{\sin^2(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin\gamma\sin\gamma'};$$

werden diese Werthe in die beiden letzten Gleichungen substituirt, darauf die erste mit $\sin x'_1\sin j$, die zweite mit $\sin x'\sin j_1$ multiplicirt, so giebt ihre Differenz

$$(\sin x'_1\sin(u-u')\sin j-\sin x'\sin(u_1-u'_1)\sin j_1)\sin(\varphi'+\varphi'_1)$$
$$=2\frac{\sin^2(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin\gamma\sin\gamma'}\cos x'\cos x'_1\left\{\sin^2x'\sin^2j_1-\sin^2x'_1\sin^2j\right\}$$
$$+2\sin x'\sin x'_1\cos(\varphi'+\varphi'_1)\left\{\sin u_1\sin u'_1\sin^2j_1-\sin u\sin u'\sin^2j\right\}.$$

Ferner ist noch

$$\cos 2n=\cos(u-u')-2\sin u\sin u'\sin^2j=\cos(u-u')-2\frac{\sin^2(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin\gamma\sin\gamma'}\left\{\sin^2x'_1\sin^2j-\sin^2j_1\sin^2j\right\},$$

und ebenso

$$\cos 2n=\cos(u_1-u'_1)-2\sin u_1\sin u'_1\sin^2j_1=\cos(u_1-u'_1)-2\frac{\sin^2(\varphi'+\varphi'_1)}{\sin\gamma\sin\gamma'}\left\{\sin^2x'\sin^2j_1-\sin^2j_1\sin^2j\right\};$$

leitet man aus der Gleichstellung dieser doppelten Ausdrücke für $\cos 2n$ die passenden Formeln ab, und substituirt sie in die zuletzt gefundene Gleichung, so erhält man ohne weitere Schwierigkeit

$$\frac{(\sin x'_1 \sin(u-u')\sin j - \sin x'\sin(u_1-u'_1)\sin j_1)\sin(\varphi'+\varphi'_1)}{\cos(u_1-u'_1)-\cos(u-u')} = \cos x'\cos x'_1 + \sin x'\sin x'_1 \cos(\varphi'+\varphi'_1),$$

welches eben die Relation ist, deren Richtigkeit bewiesen werden sollte.

Ich glaube den Leser nicht mit einer ausführlichen Behandlung der vier linearen Hauptgleichungen aufhalten zu dürfen, und zwar um so weniger, als man sich doch in allen Fällen nur abgekürzter Formeln bedienen wird, die mit den Formeln für einaxige Crystalle vollständig zusammenfallen. — Dieselbe Rücksicht bestimmt mich auch für den Fall, wo eine ungewöhnliche Welle im Innern eines zweiaxigen Crystalls reflectirt wird, nur die vier linearen Hauptgleichungen anzugeben. Diese sind

$$S''\sin\varphi = D''\cos x''\sin\varphi'' - R'\cos x'_1\sin\varphi'_1 + R''\cos x''_1\sin\varphi''_1, \qquad (a'')$$

$$S''\cos\varphi = D''\cos x''\cos\varphi'' + R'\cos x'_1\cos\varphi'_1 - R''\cos x''_1\cos\varphi''_1, \qquad (b'')$$

$$P'' = D''\sin x'' - R'\sin x'_1 - R''\sin x''_1, \qquad (c'')$$

$$P''\sin\varphi\cos\varphi = D''\sin x''\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'' + R'\sin x'_1\,\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 + R''\sin x''_1\,\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1, \qquad (d'')$$

wobei die Relationen

$$D''R'\sin x''\sin x'_1(\beta''\sin\varphi''\cos\varphi'' - \beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1) = D''R'\cos x''\cos x'_1\sin(\varphi''-\varphi'_1),$$

$$D''R''\sin x''\sin x''_1(\beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1 - \beta''\sin\varphi''\cos\varphi'') = D''R''\cos x''\cos x''_1\sin(\varphi''-\varphi''_1),$$

$$R'R''\sin x'_1\sin x''_1(\beta'_1\sin\varphi'_1\cos\varphi'_1 + \beta''_1\sin\varphi''_1\cos\varphi''_1) = R'R''\cos x'_1\cos x''_1\sin(\varphi'_1+\varphi''_1)$$

als erwiesen angenommen werden.

§. XVI.

Von der Interferenz des gewöhnlich und des ungewöhnlich gebrochenen Strahls nach ihrem Durchgange durch Platten ein- oder zweiaxiger Crystalle.

In den vorigen §§. wurde gezeigt, dafs sich das Licht beim Durchgange durch ein ungleich elastisches Medium in zwei Strahlenbündel, in den sogenannten gewöhnlichen und ungewöhnlichen, spaltet; treten diese beiden Bündel wieder in ein gleichförmig elastisches Medium, z. B. in Luft, ein, so können sie entweder unmittelbar auf einander einwirken und eigenthümliche Schwingungen im Aether hervorbringen, oder sie können, nach derselben Polarisationsrichtung gebracht mit einander interferiren und verschiedene damit zusammenhängende Farbenerscheinungen veranlassen. Zu beiden Wirkungen ist es jedoch nothwendig, dafs das Licht, welches sich in den gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahl trennt, schon vorher polarisirt ist; denn nur unter dieser Bedingung findet diejenige Uebereinstimmung in den Schwingungen beider Strahlen statt, welche zum vereinten Wirken oder zum Interferiren verlangt wird, welche aber bei gewöhnlichem Lichte in den beiden zu einander senkrechten Schwingungen mangelt. Wir haben also in diesem Paragraphen alle Eigenthümlichkeiten eines polarisirten Strahls zu erklären, welche er erlangt, wenn er durch einen Crystall hindurch gegangen ist. Die hierzu erforderlichen Beobachtungen sind bis jetzt in den wichtigsten Fällen angestellt, und besonders von Fresnel und Airy aus den Gesetzen der Undulationstheorie abgeleitet worden; ich werde ihnen in ihrem Gange folgen und dabei das in einzelnen Theilen noch Fehlende ergänzen, ohne mich jedoch auf eine Durchführung ganz specieller Fälle, die nebenbei nichts Neues darbieten, umständlicher einzulassen.

1. Circulare und elliptische Polarisation durch dünne Crystallblättchen.

Fällt ein polarisirter Lichtstrahl, wie es wenigstens gewöhnlich geschieht, senkrecht auf ein dünnes Crystallbättchen, so trennt er sich nach den beiden Axen des Querschnitts im Crystall, welchen das Blättchen bildet, in zwei Bündel, und schreitet in ihnen mit ungleicher Schnelligkeit vorwärts. Nachdem diese beiden Strahlen durch das Blättchen hindurch und wieder in die Luft gelangt sind, werden sie unter der Voraussetzung einer geringen Dicke des Blättchens noch nicht so weit von einander getrennt sein, dafs sie sich als zwei gesonderte Strahlen fortpflanzen sollten, sie werden vielmehr gemeinsam jede Stelle des Aethers erregen und so wegen der Verzögerung, die der eine gegen den andern erlitten, eine eigenthümliche kreisförmige Schwingung des Aethers veranlassen, die bald vollkommen kreisrund, bald elliptisch sein kann, und dem zufolge auch mit dem Namen der circularen und elliptischen Polarisation belegt wird. Um dieses Verhältnifs an einem leichtern Falle anschaulich zu machen, möge sich (Fig. 44.) das einfallende polarisirte Licht in die zwei nach den zu einander senkrechten Richtungen CO und CE polarisirten Strahlen von gleicher Intensität trennen, und der nach CO schwingende um eine Strecke von einer viertel Undulation gegen den nach CE polarisirten zurückbleiben; wirken dann diese beiden Strahlen nach ihrem Austritte aus dem Crystallblättchen auf ein Aethertheilchen C gemeinsam ein, so hat es der Strahl nach CE grade am weitesten aus seiner Lage gerückt bis nach E, wenn es der Strahl nach CO an seiner Stelle in C läfst, der letztere Strahl hat es dagegen nach der Zeit von einer viertel Undulation wieder bis O geführt, während es der andere nach C bringt; das Aethertheilchen ist also von E nach O gekommen, und zwar, wenn man auch die zwischenliegenden Punkte beachtet, durch einen Bogen um C von Radius $CE = CO$. Verfolgt man weiter die ganze Bahn des auf die genannte Weise durch zwei um eine viertel Undulation aus einander stehende, gleich intensive Schwingungen in Bewegung gesetzten Aethertheilchens C, so wird man leicht finden, dafs sie ein Kreis ist. Doch bestimmter giebt hierüber die mathematische Entwicklung Rechenschaft, zu der wir übergehen wollen. — Das auf das Crystallblättchen fallende Licht von einer Intensität $= A^2$ sei nach CT_1 (Fig. 44.) polarisirt, die beiden Axen des Blättchens seien CO und CE, so dafs der gewöhnliche Strahl nach CO, der ungewöhnliche nach CE schwingt, und der letztere rücke während des Durchganges durch den Crystall um eine Strecke $= \delta$ schneller als jener fort, (geht er langsamer, so wird δ negativ); aufserdem schliefse CT_1 mit CO den Winkel a ein. Bei dieser Voraussetzung ist nach dem Austritte der beiden Strahlen aus dem Blättchen an ein und demselben Orte die Schwingungsgleichung des gewöhnlichen Strahls

$$\xi_o = A \cos a \sin \frac{2\pi l}{\lambda},$$

des ungewöhnlichen

$$\xi_e = A \sin a \sin \frac{2\pi(l+\delta)}{\lambda};$$

in diesen Gleichungen ist nämlich ξ als Schwingungsweite in der Bedeutung von §. II. genommen, und durch die Bezeichnung ξ_o und ξ_e die Art der Strahlen angedeutet worden; der schon zurückgelegte Weg l bezieht sich auf einen beliebigen Anfangspunct und λ giebt wie früher die Undulationslänge irgend eines Farbestrahls an. Wenn diese beiden Strahlen auf ein Aethertheilchen C zu gleicher Zeit einwirken, so wird für die aus ihnen gemeinsame Schwingungsweite ξ_m nach der Richtung CM, welche mit CO den Winkel α bildet,

$$\xi_m = A\cos a\cos\alpha\sin\frac{2\pi l}{\lambda} + A\sin a\sin\alpha\sin\frac{2\pi(l+\delta)}{\lambda},$$

und für die gemeinsame Schwingungsweite ξ_n nach CN, senkrecht gegen CM,

$$\xi_n = -A\cos a\sin\alpha\sin\frac{2\pi l}{\lambda} + A\sin a\cos\alpha\sin\frac{2\pi(l+\delta)}{\lambda}.$$

Bringt man die erste Schwingung auf die ihr zukommende Form

$$\xi_m = A_m\sin\frac{2\pi(l+m)}{\lambda},$$

so folgt ihre Intensität oder

$$(A_m)^2 = A^2\left(\cos^2(a-\alpha) - \sin 2a\sin 2\alpha\sin^2\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$$

und

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi m}{\lambda} = \frac{\sin a\sin\alpha\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}}{\cos a\cos\alpha + \sin a\sin\alpha\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}}.$$

Wenn man auch die zweite Schwingung auf die ihr entsprechende Form

$$\xi_n = A_n\sin\frac{2\pi(l+n)}{\lambda}$$

bringt, so erhält man die Intensität derselben oder

$$(A_n)^2 = \sin^2(a-\alpha) + \sin 2a\sin 2\alpha\sin^2\frac{\pi\delta}{\lambda}$$

und

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi n}{\lambda} = -\frac{\sin a\cos\alpha\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}}{\cos a\sin\alpha - \sin a\cos\alpha\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}}.$$

Man kann jetzt den Winkel α so bestimmen, daſs die Schwingung nach CN gegen die Schwingung nach CM um eine viertel Undulation nach oder vor stehet; man hat dazu nur nöthig $n = m \pm \frac{1}{4}\lambda$ zu setzen; dann verwandelt sich $\operatorname{tang}\frac{2\pi n}{\lambda}$ in $-\operatorname{cotang}\frac{2\pi m}{\lambda}$ und die Gleichstellung der beiden so erhaltenen Ausdrücke für $\operatorname{tang}\frac{2\pi m}{\lambda}$ giebt die Bedingungsgleichung für α. Man setze also

$$\frac{\sin a\sin\alpha\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}}{\cos a\cos\alpha + \sin a\sin\alpha\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}} = \frac{\cos a\sin\alpha - \sin a\cos\alpha\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}}{\sin a\cos\alpha\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}},$$

so folgt der passende Werth von α aus

$$\operatorname{tang}2\alpha = \operatorname{tang}2a\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda},$$

und man hat auſserdem

$$(A_m)^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\cos^2 2a + \sin^2 2a\cos^2\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)},$$

$$(A_n)^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\cos^2 2a + \sin^2 2a\cos^2\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)}.$$

Nachdem man auf diese Weise die auf das Theilchen wirkenden Schwingungen in zwei neue zu einander rechtwinklige und um eine viertel Undulation aus einander stehende Schwingungen zerlegt hat, läfst sich die Bahnlinie des Theilchens sehr bequem finden. Es seien nämlich die Coordinaten dieser Bahnlinie zu einer beliebigen Zeit nach $CM = X$, nach $CN = Y$, so gelangt das Theilchen zu dieser Zeit durch die erste Schwingung allein nach einem Puncte in CM, der um X von C entfernt ist, und der, wenn man $\frac{2\pi(l+m)}{\lambda} = x$ setzt, durch

$$X = A_m \sin x$$

gegeben wird; durch die zweite Schwingung allein gelangt es zu derselben Zeit, in der $\frac{2\pi(l+n)}{\lambda} = x \pm 90^\circ$ ist, nach einem Puncte in CN, der um Y von C entfernt ist, und den man durch

$$Y = \pm A_n \cos x$$

bestimmt; durch beide Schwingungen zusammen gelangt es endlich nach einem Puncte, dessen rechtwinklige Coordinaten eben X und Y sind. Da also

$$X^2 = (A_m)^2 \sin^2 x \quad \text{und} \quad Y^2 = (A_n)^2 \cos^2 x,$$

so erhält man nach Elimination von $\sin^2 x$

$$\frac{X^2}{(A_m)^2} = \frac{(A_n)^2 - Y^2}{(A_n)^2}$$

oder

$$Y^2 = \frac{(A_n)^2}{(A_m)^2}\left[(A_m)^2 - X^2\right],$$

im Allgemeinen die Gleichung einer Ellipse, deren Axen nach CM und CN liegen, und in der die Quadrate der halben Axen $= (A_m)^2$ und $(A_n)^2$ sind. Man kennt hiernach, sobald δ und a gegeben werden, nicht nur die elliptische Bahn des schwingenden Theilchens, sondern auch durch α die Lage ihrer Axen, also alle Elemente, um diese Bahn vollständig zu verzeichnen. Ob sich übrigens das Aethertheilchen C von O nach E oder von E nach O bewege; d. h. ob eine rechts oder links gewundene Polarisation statt finde, hängt allein davon ab, ob die Schwingung nach CN um eine viertel Undulation nach oder um eben so viel vor der Schwingung nach CM hergeht; im erstern Fall läuft das Theilchen in seiner Bahn rechts, im andern links herum. Wenn $A_m = A_n$ gefunden wird, ist die Bahn eine Kreislinie. — Nimmt man, um noch einige specielle Fälle zu bemerken, $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2n\pi \pm 90^\circ$ an, d. h. beträgt die Differenz in der Schnelligkeit des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls eine Anzahl von ganzen Undulationen plus oder minus einer viertel Undulation, so wird $(A_m)^2 = A^2 \cos^2 a$, $(A_n)^2 = A^2 \sin^2 a$, $\alpha = 0$ und $Y^2 = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}(A^2 \cos^2 a - X^2)$. Demnach liegen die Axen der Ellipse nach CO und CE, und diese Ellipse verwandelt sich in einen Kreis, wenn $a = 45^\circ$ ist. — Setzt man $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = n\pi$ oder die Differenz der beiden Strahlen gleich einer beliebigen Anzahl von halben Undulationen, so findet man $(A_m)^2 = A^2$, $(A_n)^2 = 0$ und $\alpha = a$ oder $= a + \pi$, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl bezeichnet; in diesem Falle bleibt das Licht nach CT_1 oder in der entgegengesetzten Richtung geradlinig polarisirt. — Ist drittens $a = \pm 45^\circ$, so ist auch $\alpha = \pm 45^\circ$, ferner $(A_m)^2 = A^2 \cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$ und $(A_n)^2 = A^2 \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$;

die Schwingungsellipse hat ihre Axen parallel und senkrecht zu CT_1, und die Werthe der Axen hängen von der Gröfse des Winkels $\frac{\pi\delta}{\lambda}$ ab.

2. Die Farben dünner Crystallblättchen.

Wenn wie im vorigen Falle polarisirtes Licht auf ein dünnes Crystallblättchen fällt, und man die beiden mit ungleicher Schnelligkeit hindurchgegangenen Strahlen, sei es durch Reflexion von einem polarisirenden Spiegel oder durch eine Turmalinplatte oder endlich mittelst eines analysirenden Kalkspathprismas, auf ein und dieselbe Polarisationsebene bringt, so mufs aus beiden nach den §. II. gegebenen Regeln der Interferenz eine gemeinsame Schwingung entstehen, die je nach dem Gangunterschiede in den Schwingungen der Componenten eine gröfsere oder geringere Intensität besitzt. Bei Anwendung von weifsem Lichte entsteht durch das mehr oder mindere Auslöschen einzelner Farbestrahlen eine Färbung in dem übrig bleibenden Lichte. Zur genauern Untersuchung dieser Verhältnisse sei CT_1 (Fig. 45.) die Polarisationsrichtung des mit einer Intensität $=A^2$ einfallenden Lichtes; CO und CE senkrecht zu einander mögen die Axen des Crystallblättchens bezeichnen, nach welchen der gewöhnliche und ungewöhnliche Strahl beim Durchgange durch dasselbe sckwingen; CT_2 endlich gebe die Polarisationsrichtung an, auf welche die beiden Strahlen nach dem Durchgange zurückgeführt werden. Nehmen wir noch $\angle T_1CT_2=\alpha$, $\angle T_2CO=f$ an, und setzen den Weg, um welchen als Weg im luftleeren Raume betrachtet der ungewöhnliche Strahl dem gewöhnlichen vorauseilt, $=\delta$, so sind nach dem Durchgange durch das Crystallblättchen die Schwingungsweiten ξ_o und ξ_e der beiden Strahlen an demselben Orte:

$$\xi_o = A\cos(\alpha+f)\sin\frac{2\pi l}{\lambda},$$

$$\xi_e = -A\sin(\alpha+f)\sin\frac{2\pi(l+\delta)}{\lambda}.$$

Polarisirt man diese beiden Strahlen nach CT_2, so erhält man für die gemeinsame Schwingung

$$\xi = A\cos f\cos(\alpha+f)\sin\frac{2\pi l}{\lambda}+A\sin f\sin(\alpha+f)\sin\frac{2\pi(l+\delta)}{\lambda},$$

und somit die Intensität I nach §. II. (4) aus

$$I = A^2\left[\sin f\sin(\alpha+f)\sin\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right]^2+A^2\left[\cos f\cos(\alpha+f)+\sin f\sin(\alpha+f)\cos\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right]^2$$

oder

$$I = A^2\left[\cos^2\alpha-\sin 2f\sin 2(\alpha+f)\sin^2\frac{\pi\delta}{\lambda}\right].\quad (1)$$

In einigen Fällen kann es bequemer sein $\angle T_1CO$ zu bezeichnen; nennt man ihn p, so wird aus (1)

$$I = A^2\left[\cos^2\alpha-\sin 2(p-\alpha)\sin 2p\sin^2\frac{\pi\delta}{\lambda}\right].\quad (2)$$

Die Formeln (1) und (2) lassen sich auf folgende Weise erläutern. Nimmt man erstens α und δ unveränderlich, f dagegen als veränderlich an, bleiben also die polarisirenden Spiegel oder die Turmalinplatten in ihrer einmal gewählten Lage und dreht man nur dasselbe Crystallblättchen um

seine Mitte herum, so erhält man immer dieselben Intensitäten, sobald sich f um je 90° vergröfsert oder verkleinert; geht man von $f = 0$ aus, so ist die Intensität nach jeder Vierteldrehung $= A^2 \cos^2 \alpha$; es findet in dieser Lage vollkommene Helligkeit statt, wenn $\alpha = 0$, dagegen vollkommene Dunkelheit, wenn $\alpha = 90°$ ist. — Setzt man zweitens in der Formel (2) p und δ unveränderlich, d. h. läfst man dasselbe Crystallblättchen in der ihm einmal gegebenen Lage ruhen und dreht nur die untere Turmalinplatte, so geht die Formel

$$A^2 \left[\cos^2 \alpha - \sin 2p \sin 2(p-\alpha) \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}\right]$$

nach einer Drehung von 90° rechts oder links in

$$A^2 \left[\sin^2 \alpha + \sin 2p \sin 2(p-\alpha) \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}\right]$$

über. Die Zeichenänderung im zweiten Gliede zeigt, dafs in diesen Lagen ein Gegensatz in der Intensität statt findet, der am bedeutendsten hervortritt, wenn α zuerst $= 0$, nachher $= \pm 90°$ wird, dann geht nämlich die Intensität von

$$A^2 \left[1 - \sin^2 2p \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}\right] \quad \text{in} \quad A^2 \sin^2 2p \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}$$

über, und man sieht leicht, dafs wenn bei parallelen Turmalinen die Intensität sehr bedeutend ausfällt, sie bei rechtwinklig gekreuzten sehr gering ist, und umgekehrt; denn sie erleidet in der erstern Lage der Turmalinplatten einen ebenso grofsen Verlust an der Intensität A^2 des vollen Lichtes, als wie grofs die Intensität in der zweiten Lage ist. — Achtet man drittens auf eine Veränderung in $\frac{\pi \delta}{\lambda}$, die nämlich bei demselben Crystallblättchen für die verschiedenen Farbestrahlen des weifsen Lichtes statt findet, oder bei ungleich dicken Crystallblättchen für denselben Strahl, so werden die Erscheinungen am auffallendsten, wenn man zuerst bei parallelen, nachher bei gekreuzten Turmalinen beobachtet, also den Wechsel der Intensität von

$$A^2 \left[1 - \sin^2 2p \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}\right] \quad \text{in} \quad A^2 \sin^2 2p \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}$$

beachtet. Ist hier $p = 0° = 90° = 180° = \ldots.$, so übt das Crystallblättchen keinen Einflufs auf das Licht aus; alle Erscheinungen treten ebenso hervor, wie wenn kein Blättchen zwischen den Turmalinplatten vorhanden wäre. Im strengsten Gegensatze zu diesem Falle steht die Annahme, dafs $p = 45° = 135° = \ldots.$ ist, dann wechselt die Intensität von

$$A^2 \cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda} \quad \text{in} \quad A^2 \sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda}, \qquad (3)$$

und wird im ersten Falle $= A^2$, im andern $= 0$, wenn $\cos^2 \frac{\pi \delta}{\lambda} = 1$ ist, umgekehrt im ersten Falle $= 0$, im andern $= A^2$, wenn $\sin^2 \frac{\pi \delta}{\lambda} = 1$ ist. — Am schönsten tritt dieser Unterschied in den Intensitäten durch die Färbung des Lichts hervor, wenn man weifses Licht durch das Crystallblättchen hindurchgehen läfst. Denn da δ für alle Farbestrahlen constant oder wenigstens nahe constant, λ dagegen je nach den Wellenlängen veränderlich ist, so kann es bei einer geringen Dicke des Blättchens

gar nicht fehlen, dafs nicht $\cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$ in einem oder mehreren Farbestrahlen des Spectrums $= 1$, in andern $= 0$ wird; die erstern Farbestrahlen behalten dann bei parallelen Turmalinen ihre volle Intensität, während die andern sie verlieren, und umgekehrt verlieren bei gekreuzten Turmalinen jene ihre Intensität, diese behalten sie. Die ihnen in den Wellenlängen am meisten entsprechenden Strahlen nehmen am meisten an diesem Wechsel Theil, und so kommt es, dafs das übrig bleibende Licht je nach der Natur der erhaltenen Farbestrahlen farbig erscheint und dafs diese Färbung bei parallelen und gekreuzten Turmalinen complementär ist. — Dafs übrigens nur dünne Blättchen diese Farbenerscheinungen zeigen, hat ebendenselben Grund, den wir früher bei der Interferenz des von der untern und obern Fläche gleichmäfsig elastischer Scheiben reflectirten Lichtes anführten; denn sobald auch hier das Blättchen eine nur einigermafsen beträchtliche Dicke besitzt, erleidet das weifse Licht durch die ganze Farbenscale hindurch ein Verlöschen so nahe an einander liegender Strahlen, dafs die übrig bleibenden mit einander vereinigt immer noch den Eindruck eines, wenn auch an Intensität geschwächten, weifsen Lichtes auf das Auge machen. Nur die Zerlegung dieses Lichtes durch ein Prisma kann in den gleichmäfsig vertheilten dunklen Streifen des Spectrums die aus der Reihe der übrigen verschwundenen Strahlen aufzeigen.

3. Farbenringe um die Axe einaxiger Crystalle, wenn das Licht auf beiden Seiten geradlinig polarisirt wird.

Sobald man polarisirtes Licht durch einen einaxigen Crystall längs und wenig geneigt zur Axe hindurchgehen läfst, und es nach dem Durchgange mittelst eines polarisirenden Spiegels oder einer Turmalinplatte untersucht, so bemerkt man bei Anwendung von einfarbigem Lichte helle und dunkle, bei weifsem Lichte den Neutonschen ähnliche farbige Ringe, die je nach der Lage der polarisirenden Spiegel durch ein dunkles oder helles Kreuz unterbrochen werden, auch in andern Fällen eine achtfache Theilung vom Centrum aus zeigen. Zur Erklärung dieser Erscheinungen wollen wir annehmen, dafs das einfallende Licht in convergirenden Strahlen so auf die Oberfläche der senkrecht zur Axe geschnittenen Crystallplatte gelange, dafs es gerade in einem Puncte dieser Oberfläche sich kreuzend in divergirenden Strahlen durch den Crystall hindurchgehe, und dafs die Richtung der Crystallaxe die Mittellinie für diese in Kegelform divergirenden Strahlen sei; ein ähnliches Verhältnifs sucht man wenigstens immer bei den Beobachtungen herzustellen. Bezeichnet dann P (Fig. 46.) diesen Punct in der Oberfläche der Crystallscheibe, so können wir durch ihn die Axe senkrecht zur Oberfläche ziehen, und haben zugleich in ihrer Verlängerung nach oben die Normale zur brechenden Ebene, da ja im Puncte P alle Strahlen, nur unter verschiedenen Winkeln und von verschiedenen Seiten her, einfallen. Einer von diesen Strahlen falle in der durch PO zur brechenden Fläche senkrechten Ebene ein und bilde mit der in P Normalen einen Winkel $= \varphi$, der, wie es die hierher gehörigen Beobachtungen immer gestalten, so klein angenommen werde, dafs man die höhern Potenzen als φ^2 übergehen kann; dieser Strahl wird nun zunächst in zwei Strahlen gebrochen, von denen der gewöhnliche nach PO schwingt, und mit der Axe den Winkel φ' bildet, der ungewöhnliche schwingt nach PE senkrecht zu PO, und die Normale zu seiner Wellenebene schliefst mit der Axe den Winkel φ'' ein. Zur Bestimmung von φ' und φ'' geben die Gesetze der doppelten Brechung

$$\sin\varphi' = \mu \sin\varphi \quad \text{und} \quad \sin^2\varphi'' = \sin^2\varphi\,[\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\varphi''],$$

oder, da wir die höhern Potenzen als φ^2 übergehen,

$$\varphi' = \varphi'' = \mu\varphi.$$

Beide Strahlen haben also ohne weitern Fehler ein und dieselbe Lage der Wellenebene. Allein die Schnelligkeit, mit der beide Strahlen durch die Crystallscheibe gehen, ist ungleich; die Schnelligkeit des gewöhnlichen Strahls ist nach den frühern Angaben $= o = \mu$, des ungewöhnlichen $= e$ $= \sqrt{(\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\varphi''^2)} = \mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\varphi'^2$. Da der Schnelligkeit die Wellenlängen der Strahlen im Crystalle entsprechen, so wird, wenn wir die Wellenlänge des einfallenden Strahls in der Luft $= \lambda$ setzen, die Wellenlänge des gewöhnlichen Strahls $= \mu\lambda$, des ungewöhnlichen $= \left\{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\varphi'^2\right\}\lambda$ sein, und folglich macht jener auf seinem Wege durch die Crystallscheibe, deren Dicke $= T$ sei, $\frac{T}{\cos\varphi'\,\mu\lambda}$ Undulationen, dieser nur $\frac{T}{\cos\varphi'\left\{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\varphi'^2\right\}\lambda}$ Undulationen, und kommt, weil doch beide Strahlen in gleicher Zeit gleich viele Undulationen machen, um $\frac{T}{\cos\varphi'\lambda}\left\{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\varphi'^2}\right\}$ oder $\frac{T}{\cos\varphi'\lambda}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu^3}\varphi'^2$ oder endlich um $\frac{(\pi^2 - \mu^2)T}{2\mu\lambda}\varphi^2$ Undulationen zuvor. Wir wollen der Kürze wegen diesen Unterschied mit $\frac{\delta}{\lambda}$ bezeichnen. Nach dieser Vorbereitung ist es nicht schwierig, die Intensität des in Untersuchung gezogenen einfallenden Strahls zu berechnen, wenn die aus ihm entstandenen gebrochenen Strahlen nach ihrem Durchgange durch den Crystall auf eine gegebene Polarisationsrichtung gebracht werden. Setzt man nämlich die Intensität des einfallenden Strahls $= A^2$, nimmt die Richtung seiner Polarisation nach PT_1 und die Richtung der Polarisation, auf welche die gebrochenen Strahlen gebracht werden, nach PT_2, bezeichnet $\angle T_1PT_2$ mit α und $\angle T_2PO$ mit f, so sind die Schwingungsweiten ξ_o und ξ_e des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls nach dem Austritt aus der Crystallscheibe

$$\xi_o = A\cos(\alpha + f)\sin\frac{2\pi\lambda}{\lambda},$$

$$\xi_e = -A\sin(\alpha + f)\sin\frac{2\pi(l + \delta)}{\lambda};$$

durch die neue Polarisation nach PT_2 entsteht die gemeinsame Schwingung

$$\xi = A\cos f\cos(\alpha + f)\sin\frac{2\pi l}{\lambda} + A\sin f\sin(\alpha + f)\sin\frac{2\pi(l + \delta)}{\lambda},$$

und man erhält aus ihr die resultirende Intensität I nach §. II. (4)

$$I = A^2\left[\cos^2\alpha - \sin 2f\sin 2(\alpha + f)\sin^2\frac{\pi\delta}{\lambda}\right]. \quad (4)$$

Nach dieser Formel kann man die Wirkung sämmtlicher einfallenden Strahlen, bei denen sowohl f als δ veränderliche Gröfsen sind, vollständig erläutern. — Man erhält erstens bei $\alpha = 90°$, oder, wenn die beiden Polarisationsrichtungen PT_1 und PT_2 sich rechtwinklig kreuzen,

$$I = A^2 \sin^2 2f \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}. \quad (5)$$

Hiernach wechselt für einen gegebenen Werth von f, also auf einem gegebenen Radius von P aus die Intensität mit dem Werthe von $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}$; sie ist ein Maximum bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$ und ein Minimum bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$. Da aber δ von den constanten Gröfsen T, π, μ und nur von der einen veränderlichen φ abhängt, so sind die Werthe von $\sin \frac{\pi\delta}{\lambda}$ in gleichen Entfernungen von P bei jeglichem Winkel f einander gleich, und der Wechsel der Maxima und Minima giebt um P concentrische, abwechselnd helle und dunkle Ringe. Die Intensität der Minima in diesen Ringen bleibt überall $= 0$; die Intensität der Maxima ändert sich mit f, sie ist ebenfalls $= 0$ bei $\sin 2f = 0$ oder bei $f = 0° = 90° = 180° = 270°$. Demnach werden die Ringe nach PT_1 und PT_2 von einem dunklen Kreuze unterbrochen. Von diesem Kreuze aus wächst die Helligkeit der Maxima ganz allmählig, sie ist nach beiden Seiten in einem Abstande von $5° = 0{,}03015 A^2$, von $10° = 0{,}11698 A^2$, von $15° = 0{,}25000 A^2$, von $20° = 0{,}41318 A^2$, von $25° = 0{,}58682 A^2$, von $30° = 0{,}75000 A^2$, von $35° = 0{,}88302 A^2$, von $40° = 0{,}96985 A^2$, von $45° = A^2$. Unter diesen Umständen aber bildet das dunkle Kreuz nicht blofs eine dunkle Linie, sondern gewinnt vielmehr das Ansehen eines nach den Seiten verwaschenen dunklen Büschels. — Die Radien φ der dunklen Ringe findet man aus $\frac{\pi\delta}{\lambda} = 0 = \pi = 2\pi = 3\pi = \ldots$; substituirt man hierin für δ seinen Werth $\frac{1}{2} \frac{(\pi^2 - \mu^2)T}{\mu} \varphi^2$, so erhält man die Radien aus

$$\varphi^2 = 0 = \frac{2\mu\lambda}{(\pi^2 - \mu^2)T} = \frac{4\mu\lambda}{(\pi^2 - \mu^2)T} = \ldots.$$

Ebenso findet man die Radien der hellsten Stellen in den Ringen aus $\sin \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$, oder aus

$$\varphi^2 = \frac{\mu\lambda}{(\pi^2 - \mu^2)T} = \frac{3\mu\lambda}{(\pi^2 - \mu^2)T} = \frac{5\mu\lambda}{(\pi^2 - \mu^2)T} = \ldots.$$

Natürlich giebt φ nur die relative, nicht die absolute Gröfse der Radien an, denn diese hängt noch von dem Abstande des untern Spiegels von der Crystallplatte ab; man sieht aber aus den Formeln, dafs das Centrum der Ringe dunkel ist, und dafs unter übrigens gleichen Umständen sich die Radien der dunklen Ringe wie die Quadratwurzeln aus 0, 2, 4, 6 ...., der hellen wie die Quadratwurzeln aus 1, 3, 5 .... verhalten; ferner wachsen die Quadrate der Radien direct mit λ, und indirect mit T, der Dicke der Platten. Also giebt rothes Licht wie dünne Platten die gröfsten, violettes Licht wie dicke Platten die kleinsten Ringe. Bei Platten aus verschiedenen Crystallen sind die Ringe desto gröfser, je kleiner die Differenz $(\pi^2 - \mu^2)$ ist. — Wendet man bei den Beobachtungen weifses Licht an, so geben die verschiedenen Farbestrahlen ungleich breite Ringe, die sich deckend und mit einander vermischend farbige, den Neutonschen ähnliche Ringe liefern; auch sie werden von dem dunklen rechtwinkligen Kreuze unterbrochen.

Zweitens sei $\alpha = 0$, d. h. die Turmaline liegen parallel zu einander. Die Gleichung (5) verwandelt sich jetzt in

$$I = A^2 \left[1 - \sin^2 2f \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}\right], \quad (6)$$

in eine Formel, deren zweites Glied eben dasselbe ist, als der Ausdruck (5) für die gesammte Intensität war. Man ziehe also die im vorigen Falle nachgewiesene Intensität von der Intensität A^2 des einfallenden Lichtes ab, und man erhält einen treuen Abdruck der Erscheinung, die durch (6) gegeben wird. Um sie kurz zu erläutern, so besteht sie wieder aus dunklen und hellen Ringen um das helle Centrum P; ein helles Kreuz parallel und senkrecht gegen die Polarisationsrichtungen durchbricht sie, und während die Maxima überall $= A^2$ sind, nehmen die Minima der Ringe von A^2 im hellen Kreuze nach und nach bis 0 ab. —

Hat drittens α einen beliebigen Werth, so bestimmt man die Intensität nach der allgemeinen Formel, also aus

$$I = A^2 \left[\cos^2\alpha - \sin 2f \sin 2(\alpha + f) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}\right]. \quad (7)$$

Die Intensität wird $= A^2 \cos^2\alpha$, sowohl wenn $\sin 2f = 0$, als auch wenn $\sin 2(\alpha + f) = 0$ ist; die hellen und dunklen Ringe werden daher auf 8 Radien von gleichmäfsig erhellten Streifen unterbrochen, nämlich bei $f = 0^\circ = 90^\circ - \alpha^\circ = 90^\circ = 180^\circ - \alpha = 180^\circ = 270^\circ - \alpha = 270^\circ = 360^\circ - \alpha$. Im ersten Segmente von $f = 0^\circ$ bis $f = 90^\circ - \alpha$ finden die Maxima der Intensität bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$, die Minima bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$ statt; jene betragen $A^2 \cos^2\alpha$, diese gehen von $A^2 \cos^2\alpha$ aus und sind in der Mitte des Segmentes $= 0$. Im zweiten Segmente von $f = 90^\circ - \alpha$ bis $f = 90^\circ$ finden die Maxima umgekehrt bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$ und die Minima bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$ statt; diese betragen jetzt $A^2 \cos^2\alpha$, jene gehen von $A^2 \cos^2\alpha$ aus und werden in der Mitte des Segments $= A^2$. Das dritte, fünfte und siebente Segment stimmt mit dem ersten, das vierte, sechste und achte mit dem zweiten überein.

4. Farbenringe um die optischen Axen zweiaxiger Crystalle, wenn das Licht auf beiden Seiten geradlinig polarisirt wird.

Die farbigen Ringe und die sie durchschneidenden dunklen oder hellen Kreuze nehmen eine andere Gestalt an, wenn polarisirtes Licht wie im vorigen Falle durch Platten zweiaxiger Crystalle geht. Stehen nämlich die Oberflächen dieser Platten senkrecht gegen die den spitzen Winkel der optischen Axen halbirende Crystallaxe, so sind die Ringe, sich nach und nach mit einander verschlingend, um die beiden optischen Axen geordnet und die Kreuze gehen in hyperbolische Büschel über, die sich ebenfalls durch die optischen Axen auf verschiedene Weise hindurchziehen. Die Art dieser Erscheinungen läfst sich am leichtesten erklären, wenn man auch hier das Licht in convergirenden Strahlen so auf die Oberfläche der Platte gelangen läfst, dafs sie sich in einem Puncte derselben, welcher die Crystallaxe bezeichnet, durchschneiden und dann um sie als Mittellinie divergirend durch den Crystall dringen. Ueberdies wähle man aber Crystallplatten, in denen der Winkel zwischen den optischen Axen sehr spitz ist, weil man nur so die zu beiden Axen gehörigen Ringe zugleich übersieht, und die Berechnung nur so den gehörigen Vortheil von der frühern Annahme ziehen kann, dafs die einfallenden Strahlen einen kleinen Winkel φ mit der als Normale zur brechenden Fläche verlängerten Axe einschliefsen. Nimmt man diese Bedingungen an, so sei wieder P (Fig. 46.) der gemeinsame Einfallspunct sämmtlicher Strahlen und in ihm liege senkrecht zur Platte die Crystallaxe π;

ein nach PT_1 polarisirter und unter einem Winkel φ irgendwie einfallender Strahl werde doppelt gebrochen; der gewöhnliche Strahl schwinge nach PO, der ungewöhnliche nach PE, und die Normalen zu ihren Wellenebenen mögen mit der Axe π die Winkel φ' und φ'' bilden. Vernachlässigt man nun die höhern Potenzen als φ^2, so wird man aus den Angaben über die doppelte Brechung $\varphi' = \varphi'' = \nu\varphi$ erhalten, und zugleich finden, daſs einer von beiden Strahlen je nach der Natur des Crystalls schneller durch ihn hindurchkommt, als der andere. Lassen wir den ungewöhnlichen um $\frac{\delta}{\lambda}$ Undulationen voraneilen, so haben wir zur Bestimmung der aus beiden Strahlen resultirenden Intensität, wenn sie nach ihrem Austritt aus dem Crystall nach PT_2 polarisirt werden, dieselben Angaben wie in der vorigen Nummer, und deshalb folgt mit Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnungen

$$I = A^2 \left[\cos^2\alpha - \sin 2f \sin 2(\alpha + f) \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}\right]. \quad (8)$$

Bevor wir zur Erläuterung dieser Formel schreiten können, müssen wir zwei Fragen beantworten, erstens, welche einfallenden Strahlen haben die Polarisationsrichtungen ihrer gebrochenen Strahlen nach PO und PE, und zweitens, welcher Werth kommt der Gröſse δ zu? Zur Beantwortung der erstern Frage betrachten wir den Punct, in welchem sämmtliche Strahlen einfallen, als den Mittelpunct des Crystalls, und legen um ihn eine Kugel vom Radius $= 1$; in der Oberfläche derselben bezeichne P (Fig. 47.) die Axe π, A, A' die optischen Axen, die den kleinen Winkel $2n$ einschlieſsen, und R einen in der Ebene durch FPR einfallenden Strahl, nachdem er unter dem Winkel $\varphi' = \varphi''$ die gewöhnliche und ungewöhnliche Brechung erfahren hat. Somit ist zuerst $PR = \varphi'$, und wenn wir auſserdem die bei der Entwicklung der doppelten Brechung eingeführten Bezeichnungen aufnehmen, $AR = u$ und $A'R = u'$; ferner geht die Polarisationsrichtung des gewöhnlich gebrochenen Strahls nach der Linie, welche den Winkel ARA' halbirt, nach SR oder nach der ihr parallelen PO, und der ungewöhnliche Strahl schwingt senkrecht dazu nach PE. Um diese Richtungen aus der Richtung des einfallenden Strahls zu bestimmen, sei $\angle APF = \omega$, $\angle APO = p$, $\angle ARP = x$ und $\angle PRA' = y$, dann giebt die Figur

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cotg} n \sin\varphi' + \cos\omega \cos\varphi'}{\sin\omega}, \quad (9)$$

und

$$\operatorname{cotg} y = \frac{\operatorname{cotg} n \sin\varphi' - \cos\omega \cos\varphi'}{\sin\omega}. \quad (10)$$

Daraus folgt

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y - x)}{\sin x \sin y} = \frac{2\cos\varphi' \cos\omega}{\sin\omega}$$

und

$$\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y + 1 = \frac{\cos(y - x)}{\sin x \sin y} = \frac{\operatorname{cotg}^2 n \sin^2\varphi' - \cos^2\omega \cos^2\varphi' + \sin^2\omega}{\sin^2\omega}.$$

Uebergeht man in diesen Ausdrücken die sehr kleine Gröſse φ'^2 und behält sie nur da, wo sie mit dem groſsen Werthe $\operatorname{cotg}^2 n$ verbunden ist, so zieht man aus den Formeln die abgekürzten

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin x \sin y} = \frac{2\cos\omega}{\sin\omega}, \quad (11)$$

und

$$\frac{\cos(y - x)}{\sin x \sin y} = \frac{\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n - \cos 2\omega}{\sin^2\omega}. \quad (12)$$

Aufserdem folgt aus den Gleichungen (9) und (10)

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \omega + \operatorname{cotg}^2 n \sin^2 \varphi' + \cos^2 \omega \cos^2 \varphi' + 2 \operatorname{cotg} n \sin\varphi' \cos\varphi' \cos\omega},$$

oder abgekürzt

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 \omega}{1 + \varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n + 2\varphi' \operatorname{cotg} n \cos\omega}; \quad (13)$$

$$\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 y} = \frac{\sin^2 \omega}{\sin^2 \omega + \operatorname{cotg}^2 n \sin^2 \varphi' + \cos^2 \omega \cos^2 \varphi' - 2 \operatorname{cotg} n \sin\varphi' \cos\varphi' \cos\omega},$$

oder abgekürzt

$$\sin^2 y = \frac{\sin^2 \omega}{1 + \varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n - 2\varphi' \operatorname{cotg} n \cos\omega}. \quad (14)$$

Nun ist aber im $\triangle PRA$ oder PRA'

$$-\cos p = \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\varphi' \cos\omega - \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\omega,$$

oder, wenn man diese Gleichung quadrirt,

$$\cos^2 p = \tfrac{1}{2}\cos^2 \varphi' \sin^2 \omega - \tfrac{1}{2}\cos^2 \varphi' \sin^2 \omega \cos(y-x) + \tfrac{1}{2}\cos^2 \omega + \tfrac{1}{2}\cos^2 \omega \cos(y-x)$$
$$- \cos\varphi' \sin(y-x) \sin\omega \cos\omega,$$

woraus sich mit abgekürzten Gliedern

$$\cos^2 p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega \cos(y-x) - \tfrac{1}{2}\sin 2\omega \sin(y-x)$$

ergiebt. Substituirt man hierin die Werthe für $\sin(y-x)$ und $\cos(y-x)$ aus (11) und (12), so erhält man

$$\frac{\cos 2p}{\sin x \sin y} = \frac{\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n \cos 2\omega - 1}{\sin^2 \omega}.$$

Man nehme von dieser Gleichung wieder die Quadrate auf beiden Seiten, und setze für $\sin^2 x$ und $\sin^2 y$ ihre Werthe aus (13) und (14), so bekommt man

$$\cos^2 p[1 - 2\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n \cos 2\omega + \varphi'^4 \operatorname{cotg}^4 n] = \varphi'^4 \operatorname{cotg}^4 n \cos^2 2\omega - 2\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n \cos 2\omega + 1. \quad (16)$$

Diese Gleichung läfst sich unter die Form

$$\sin^2 2p - 2\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n \cos 2\omega \sin^2 2p - \varphi'^4 \operatorname{cotg}^4 n (\cos^2 2p - \cos^2 2\omega = 0$$

bringen, und löst sich in die zwei Factoren

$$[\sin 2p - \sin(2\omega + 2p)\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n]\,[\sin 2p + \sin(2\omega - 2p)\varphi'^2 \operatorname{cotg}^2 n] = 0. \quad (17)$$

Beide Factoren gelten einzeln, der erste für $-p$, weil oben durch $\cos p$ zugleich auch $-p$ aufgenommen wurde, der andere für $+p$; behalten wir nur den letztern bei, auf welchen wir es abgesehen hatten, so ist

$$\varphi'^2 = -\frac{\operatorname{tang}^2 n \sin 2p}{\sin 2(\omega - p)},$$

oder, wenn n für $\operatorname{tang} n$ gesetzt wird,

$$\varphi'^2 = -\frac{n^2 \sin 2p}{\sin 2(\omega - p)}. \quad (18)$$

Wir haben hiermit die allgemeine Gleichung, welche für eine durch p gegebene Polarisationsrichtung des gewöhnlichen und ungewöhnlichen Strahls ihre durch φ' und ω bestimmte Richtung finden läfst. Allein kennt man die Richtung der gebrochenen Strahlen, so ist auch die Richtung des einfallenden

bekannt, da sich für ihn nur die Dimensionen φ' und n in $\frac{\varphi'}{\nu} = \varphi$ und $\frac{n}{\nu} = N$ verwandeln; dadurch geht (18) in

$$\varphi^2 = -\frac{N^2 \sin 2p}{\sin 2(\omega - p)} \quad (19)$$

über. Zur bequemern Uebersicht über diese Gleichung sei zuerst $p = 45°$, dann wird

$$\varphi^2 = \frac{N^2}{\cos 2\omega}, \quad (20)$$

die bekannte Polargleichung einer rechtwinkligen Hyperbel. Bezeichnet nämlich a die halbe grofse, c die halbe kleine Axe einer Hyperbel, und sind die vom Mittelpunct aus genommenen rechtwinkligen Coordinaten x und y, so findet zwischen ihnen die Gleichung statt

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Setzt man hierin den vom Mittelpunct gezogenen Radius vector nach dem durch die Coordinaten bestimmten Punct $= \varphi$ und den Winkel zwischen φ und $a = \omega$, so ist $y = \varphi \sin \omega$, $x = \varphi \cos \omega$, und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$\varphi^2 = \frac{c^2}{\frac{a^2 + c^2}{a^2} \cos^2 \omega - 1},$$

Ist die Hyperbel rechtwinklig, also $a = c$, so erhält man

$$\varphi^2 = \frac{a^2}{\cos 2\omega},$$

also dieselbe Gleichung wie (20), sofern $a = N$ genommen wird. Wenn es also darauf ankommt nachzuweisen, welche einfallende oder ausfahrende Strahlen von der Art sind, dafs die Polrrisationsrichtungen der aus ihnen entstehenden, gewöhnlich gebrochenen Strahlen mit der Linie durch AA' den Winkel p oder $p + 90°$ bilden, denn diese Aenderung macht keinen Unterschied in den Formeln, so giebt die Gleichung (20) alle Strahlen als hierher gehörig an, welche in den beiden rechtwinkligen Hyperbeln liegen, deren Mittelpunct sich in P befindet, und deren grofse Axe die Richtung von AA' und den Werth von $\frac{2n}{\nu} = 2N$ hat. Die Symptoten zu diesen Hyperbeln kreuzen sich rechtwinklig in P, und neigen gegen AA' unter einem Winkel von 45°, d. i. unter einem Winkel $= p$. — Für andere Werthe setze man

$$2\omega = 2\Omega + 2p - 90°, \quad (21)$$

dann wird aus (19)

$$\pi^2 = \frac{N^2 \sin 2p}{\cos 2\Omega}, \quad (22)$$

welche Gleichung ebenfalls zwei rechtwinklige Hyperbeln giebt, deren halbe Axe $= N\sqrt{(\sin 2p)}$ ist. Die Asymptoten dieser zusammengehörigen Hyperbeln neigen sich gegen AA' unter einem Winkel, der durch $\Omega = 45°$ bestimmt wird, also unter einem Winkel $= w$ oder nach (21) $= p$. Durch die Lage der Asymptoten, die jedesmal nach den gegebenen Polarisationsrichtungen PO und PE geben, durch die Bestimmung, dafs der Abstand der Hyperbelscheitel von $P = N(\sin 2p)$ ist, und endlich durch die Bemerkung, dafs für $\Omega = -(p - 45°)$, in welchem Falle der Radius vector in AA'

liegt, $\varphi = N$ wird, dafs also sämmtliche Hyperbeln durch die beiden Puncte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gehen, welche in AA' um N von P abstehen, wird es äufserst leicht, die jedesmal in Untersuchung kommenden Hyperbeln der einfallenden oder ausfahrenden Strahlen zu verzeichnen. Sie verwandeln sich in ein geradliniges Kreuz bei $p = 90°$, und stehen mit ihren Scheiteln am weitesten bei $p = 45°$ aus einander, nämlich um $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 2N$. — Noch ist zur leichtern Vergleichung der eben gefundenen Angaben mit den Resultaten bei einaxigen Crystallen zu bemerken, dafs wir dort für die Lage der einfallenden Strahlen, die nach einer bestimmten Polarisationsrichtung gebrochen werden, die Lage der Asymptoten haben, wofür wir hier die zu den Asymptoten gehörigen Hyperbeln erhalten. Dies ist für unsern Fall der Hauptunterschied zwischen ein- und zweiaxigen Crystallen.

Zur Bestimmung von δ ergiebt sich aus den Gesetzen der doppelten Brechung die Schnelligkeit des gewöhnlichen Strahls $= o = \sqrt{\left\{\mu^2 + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u - u'}{2}\right)\right\}}$ oder abgekürzt $= \mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\sin^2\left(\frac{u - u'}{2}\right)$, des ungewöhnlichen $= e = \sqrt{\left\{\mu + (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\left(\frac{u + u'}{2}\right)\right\}}$ oder abgekürzt $= \mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\sin^2\left(\frac{u + u'}{2}\right)$; hiernach macht der gewöhnliche Strahl auf seinem Wege $\frac{T}{\cos\varphi}$ durch den Crystall $\frac{T}{\cos\varphi'\left\{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\sin^2\left(\frac{u - u'}{2}\right)\right\}\lambda}$ Undulationen, und der ungewöhnliche nur $\frac{T}{\cos\varphi'\left\{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\sin^2\left(\frac{u + u'}{2}\right)\right\}\lambda}$ Undulationen, wodurch er jenem um

$$\frac{T}{\cos\varphi'\lambda}\left\{\frac{1}{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\sin^2\left(\frac{u - u'}{2}\right)} - \frac{1}{\mu + \frac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu}\sin^2\left(\frac{u + u'}{2}\right)}\right\}$$ Undulationen zuvorkommt. Dieser Unterschied verwandelt sich zunächst mit Uebergehung der höhern Potenzen von $(\pi^2 - \mu^2)$ in $\frac{1}{2}\frac{T}{\cos\varphi'\lambda}\left(\frac{\pi^2 - \mu^2}{\mu^3}\right)\sin u \sin u'$, und dieser Ausdruck wieder, wegen der kleinen Werthe, die φ', u, u' haben, in $\frac{1}{2}\frac{(\pi^2 - \mu^2)T}{\mu^3}uu'$. Setzt man hierin noch zur Anschliefsung dieser Angaben an die frühern $u = \nu U$ und $u' = \nu U'$, wodurch U und U' in Bezug auf die Puncte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, d. i. auf die einfallenden oder aus dem Crystall hervortretenden Strahlen stehen, so ist allgemein $\delta = \frac{1}{2}\frac{(\pi^2 - \mu^2)\nu^2 T}{\mu^3}UU'$. Bei einaxigen Crystallen wird $U = U' = \varphi$ und $\nu = \mu$, also $\delta = \frac{1}{2}\frac{(\pi^2 - \mu^2)T}{\mu}\varphi^2$, wie oben.

Nach Beantwortung der beiden Fragen über die zu einer gegebenen Polarisationsrichtung gehörigen einfallenden Strahlen und über den Werth von δ, wenden wir uns zur Erläuterung der Formel (8). Es sei zuerst $\alpha = 90°$, dann wird

$$I = A^2 \sin^2 2f \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}. \quad (23)$$

Nach dieser Formel hat die Intensität ihre Maxima bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$, ihre Minima bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$, und die Intensität der letztern ist überall $= 0$. Man hat aber $\sin \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$, wenn

$$\frac{\pi\delta}{\lambda} = 0 = \pi = 2\pi = 3\pi = \ldots.$$

ist; substituirt man hierin den Werth von δ, so liegen die Minima bei

$$UU' = 0 = \frac{2\lambda}{T} \frac{\mu^3}{(\pi^2 - \mu^2)\nu^2} = \frac{4\lambda}{T} \frac{\mu^3}{(\pi^2 - \mu^2)\nu^2} = \ldots.$$

Es mögen nun (Fig. 48.) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, P, $\mathfrak{R}$ dieselben Puncte, wie in Fig. 47. A, A', P, R bezeichnen, nur seien die Dimensionen von AP, $A'P$, RP nach den einfallenden oder ausfahrenden Strahlen genommen, also im Verhältnifs von $\nu : 1$ vergröfsert, nämlich $\mathfrak{A}P = \mathfrak{A}'P = \frac{n}{\nu} = N$, $\mathfrak{R}P = \frac{\mathfrak{R}P}{\nu} = \frac{\varphi'}{\nu} = \varphi$, $\mathfrak{A}\mathfrak{R} = \frac{u}{\nu} = U$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{R} = \frac{u'}{\nu} = U'$. Die Bedingungsgleichung für die Minima giebt jetzt an, dafs das Product von UU' oder das Product aus den Abständen eines Strahls, dessen Intensität verschwinden soll, von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ einer constanten, aber von 0 zu 2, 4, 6.... nach und nach wechselnden Gröfse gleich sein müsse. Trägt man hiernach die dunklen Ringe auf, so sieht man bald, dafs sie zuerst etwas elliptisch geformte Ringe um $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ bilden, später treten sie in der Mitte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ näher an einander und winden sich endlich um beide Pole in Form eines gegen P eingedrückten Ovals. Man kennt die Form dieser Ringe unter dem Namen der Lemniscate; ihre auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Gleichung erhält man, wenn man $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = 2a$ und ab nach und nach $= 0 = \frac{2\lambda}{T} \frac{\mu^3}{(\pi^2 - \mu^2)\nu^2} = \ldots.$ setzt; ist dann $\mathfrak{R}D$ rechtwinklig auf $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = y$, $PD = x$, so findet man

$$U^2 = y^2 + (a + x)^2, \qquad U'^2 = y^2 + (a - x)^2,$$

also $U^2 U'^2$ oder $a^2 b^2 = [y^2 + a^2 + 2ax + x^2][y^2 + a^2 - 2ax + x^2]$,

woraus die bekannte Gleichung der Lemniscate

$$(y^2 + a^2 + x^2)^2 = a^2 b^2 + 4a^2 x^2$$

entsteht. — Die Maxima bilden eine ähnliche Lemniscate, die zwischen die Ringe der Minima eintritt. Ihre Figur folgt aus

$$UU' = \frac{\lambda}{T} \frac{\mu^3}{(\pi^2 - \mu^2)\nu^2} = \frac{3\lambda}{T} \frac{\mu^3}{(\pi^2 - \mu^2)\nu^2} = \ldots.$$

Allein die Intensität der Maxima ist nicht überall constant, sie wechselt mit dem Winkel f von 0 bis A^2, und dadurch entstehen dunkle hyperbolische Büschel, die die Stelle des dunklen Kreuzes bei einaxigen Crystallen vertreten. Die Maxima werden nämlich $= 0$, wenn $\sin 2f = 0$ oder $f = 0^\circ = 90^\circ = 180^\circ = 270^\circ$ ist; alle Strahlen also, deren Polarisationsrichtungen im Crystalle parallel zu den gekreuzten Spiegeln liegen, verschwinden; diese Strahlen gehören aber zu den Hyperbeln, deren Asymptoten in die Richtung der Spiegel fallen. Demnach sind die Ringe um die optischen Axen durch diese beiden dunklen Hyperbeln unterbrochen. Ferner nehmen die Maxima in den nächst gelegenen Hyperbeln, wenn man sich den ganzen Raum der Ringe in Hyperbeln durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zerlegt, deren Asymptoten etwa von 5° zu 5° aus einander liegen, nur nach und nach an Intensität

zu, wie dies in der vorigen Nummer vollständiger angegeben wurde; erst diejenigen Hyperbeln, deren Asymptoten unter 45° gegen die Asymptoten der ganz dunklen Hyperbeln stehen, haben das volle Licht $= A^2$. Nach den bisherigen Angaben kann es weiter nicht schwierig sein die ganze Erscheinung so zu entwerfen, wie sie in relativer Gröfse hervortritt; man hat hierbei nur nicht zu übersehen, dafs die Form der Hyperbeln zu den durch die Stellung der Spiegel gegebenen Asymptoten noch von der Lage der die optischen Axen verbindenden Linie $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ gegen eben diese Asymptoten abhängt, denn durch den Winkel p, unter welchem $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ gegen sie liegt, wird die Entfernung der Scheitelpuncte der Hyperbeln vom Durchschnittspuncte P des Asymptoten bedingt, wie oben gezeigt wurde. Daher wechseln die dunklen hyperbolischen Büschel Form und Lage, sobald man die Crystallplatte während der Beobachtung herumdreht.

Wenn zweitens beide Spiegel parallel zu einander stehen oder $\alpha = 0$ ist, folgt die Intensität aus

$$I = A^2 \left[1 - \sin^2 2f \sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda}\right], \qquad (24)$$

und die Erscheinung ist zur vorigen complementär, d. h. beide Figuren zusammengenommen liefern überall die Intensität $= A^2$.

Hat drittens α einen beliebigen Werth, so finden auch hier dieselben Schlüsse wie bei einaxigen Crystallen statt. Man theile sich den Raum, welchen die Ringe einnehmen, in lauter hyperbolische Streifen durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, und unterscheide vor allen acht, den ersten, dessen Asymptoten von $f = 0°$ bis $90° - \alpha$, den zweiten, dessen Asymptoten von $f = 90° - \alpha$ bis $90°$, den dritten von $f = 90°$ bis $180° - \alpha$ u. s. w. gehen. Die Maxima im ersten Streifen sind $= A^2 \cos^2 \alpha$ und finden bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$ statt, die Minima wechseln von $A^2 \cos^2 \alpha$ bis 0 in der Mitte des Streifens und sind bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$; im zweiten hyperbolischen Streifen sind die Minima $= A^2 \cos^2 \alpha$ bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$, und die Maxima bei $\sin^2 \frac{\pi\delta}{\lambda} = 1$ wechseln von $A^2 \cos^2 \alpha$ bis A^2 in der Mitte des Streifens; und so ändert sich die Intensität von Streifen zu Streifen. Die Grenzen zwischen ihnen macht ein hyperbolischer Strich von durchgehend einerlei Intensität $= A^2 \cos^2 \alpha$. Man sieht aus dieser Durchführung, dafs die Erscheinungen bei zweiaxigen Crystallen ganz mit denen bei einaxigen zusammenfallen, sofern man nur die concentrischen Ringe durch die Lemniscate, und die dort angegebene Abtheilung der Ringe durch Radien hier durch eine Theilung der Lemniscate nach passenden hyperbolischen Linien ersetzt. Unter diesen Umständen werde ich die folgenden Untersuchungen für beide Arten von Crystallen zugleich führen, aber in der Anwendung der Formeln mich zunächst der den einaxigen Crystallen entsprechenden Ausdrücke bedienen, die man leicht in die für zweiaxige passenden umsetzen wird.

5. Farbenringe um die Axen der Crystallplatten, wenn das Licht auf der einen Seite circular oder elliptisch, auf der andern geradlinig polarisirt wird.

Das nach PT_1 (Fig. 49.) polarisirte Licht von einer Intensität $= A^2$ erfahre, bevor es zur Crystallplatte gelangt, durch ein Fresnelsches Parallelopiped oder durch eine passende Crystallscheibe

eine rotirende Polarisation, so dafs der nach Pr zerlegte Strahl um eine viertel Undulation gegen den senkrecht dazu nach PR zerlegten zurückbleibe; darauf schwinge der gewöhnlich gebrochene Strahl nach PO, der ungewöhnlich gebrochene nach PE, und komme jenem um $\frac{\delta}{\lambda}$ Undulationen zuvor; endlich polarisire man beide Strahlen nach ihrem Austritt aus der Crystallplatte in der Richtung PT_2. Um für diesen Fall die resultirende Intensität eines beliebigen Strahls zu finden, sei $\angle T_1PR = \beta$, $\angle T_1PT_2 = \alpha$ und $\angle T_2PO = f$; dann erhält man für die Schwingungsweiten ξ_r und ξ_r' der Strahlen nach PR und Pr, wenn man zur Abkürzung $\frac{2\pi l}{\lambda} = x$ und $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \Delta$ setzt,

$$\xi_r = A \cos\beta \sin x,$$
$$\xi_r' = A \sin\beta \sin(x - 90^\circ),$$

ferner für die Schwingungsweiten ξ_o und ξ_e nach PO und PE

$$\xi_o = A\cos\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin x + A\sin\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ),$$
$$\xi_e = -A\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\Delta) + A\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ+\Delta),$$

endlich für die gemeinsame Schwingungsweite ξ nach PT_2

$$\xi = A\cos f\cos\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin x + A\cos f\sin\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$$
$$+ A\sin f\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\Delta) - A\sin f\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ+\Delta).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nach §. II. (4) die resultirende Intensität I des in Untersuchung gezogenen Strahls

$$I = A^2[-\cos f\sin\beta\sin(\beta+\alpha+f) + \sin f\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin\Delta + \sin f\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\cos\Delta]^2$$
$$+ A^2[\cos f\cos\beta\cos(\beta+\alpha+f) + \sin f\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\cos\Delta - \sin f\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin\Delta]^2.$$

Nach Auflösung der Quadrate und nach den gehörigen Reductionen verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$I = \tfrac{1}{2}A^2[1 + \cos 2f\cos 2\beta\cos 2(\beta+\alpha+f) + \sin 2f\cos 2\beta\sin 2(\beta+\alpha+f)\cos\Delta - \sin 2f\sin 2\beta\sin\Delta]. \quad (25)$$

Zur nähern Erläuterung dieser allgemeinen Formel sei erstens $\beta = 45^\circ$, d. h. das einfallende Licht werde zuvor rechts circular polarisirt; nun ist

$$I = \tfrac{1}{2}A^2(1 - \sin 2f\sin\Delta). \quad (26)$$

Hiernach findet sich bei $f = 0^\circ = 90^\circ = \ldots.$ ein helles Kreuz von einer Intensität $= \frac{1}{2}A^2$, und es theilt die Ringe in vier Quadranten; in diesen wechseln die Maxima und Minima ihre Stellen, im ersten und dritten sind jene bei $\sin\Delta = 0$, diese bei $\sin\Delta = 1$, im zweiten und vierten grade umgekehrt. Auch die Intensitäten sind ungleich; die erstern Maxima sind $= \frac{1}{2}A^2$, die Minima zwischen $\frac{1}{2}A^2$ und 0; die andern Maxima wechseln zwischen $\frac{1}{2}A^2$ und A^2, die Minima sind $= \frac{1}{2}A^2$. Da ferner α aus der Formel ausgefallen ist, so kann man den obern polarisirenden Spiegel zugleich mit dem Fresnelschen Parallelopiped drehen, ohne dafs sich die Erscheinung ändert. Wird der untere Spiegel gedreht, so bleibt die Erscheinung bei einaxigen Crystallen ebenfalls dieselbe, bei zweiaxigen ändert sich mit Rücksicht auf die Lage von PT_2 oder PO gegen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ die Form der hyperbolischen gleich hellen Streifen und somit die Intensitätsvertheilung in der Figur.

Setzt man zweitens $\beta = -45^\circ$ oder läfst man, was dasselbe ist, das einfallende Licht zuvor links circular polarisirt werden, so findet man

$$I = \tfrac{1}{2}A^2(1 + \sin 2f\sin\Delta), \quad (27)$$

und die Erscheinung ist complementär zur vorigen. Betrachtet man übrigens die Figur gegen die vorige entgegengesetzt herum, so dafs f negativ wächst, so kann man sie als gleichbleibend bezeichnen.

Drittens bei $\beta = 0$ verwandelt sich (25) in

$$I = A^2 \left[\cos^2\alpha - \sin 2f \sin 2(\alpha + f) \sin^2 \frac{\Delta}{2}\right], \qquad (28)$$

in dieselbe Formel, welche oben untersucht wurde. Dies war zu erwarten, da das einfallende Licht nur geradlinig polarisirt wird. Viertens werde $\alpha = 90^\circ$, wo PT_1 und PT_2 senkrecht zu einander stehen. Man erhält aus (25)

$$I = \tfrac{1}{2}A^2 [1 - \cos 2f \cos 2\beta \cos 2(\beta + f) - \sin 2f \cos 2\beta \sin 2(\beta + f) \cos \Delta - \sin 2f \sin 2\beta \sin \Delta].$$

Da aber allgemein $c \cos m \cos n + c' \sin m \sin n = C \cos(n - N)$ ist, wenn man

$$C = \sqrt{(c^2 \cos^2 m + c'^2 \sin^2 n)} \quad \text{und} \quad N = \frac{c'}{c} \operatorname{tang} m$$

setzt, so gestaltet sich die vorstehende Gleichung in

$$I = \tfrac{1}{2}A^2 \{1 - \cos 2f \cos 2\beta \cos 2(\beta + f) - \sin 2f \sqrt{[\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta \sin^2 2(\beta + f)]} \cos(\Delta - B)\} \qquad (29)$$

um, worin $\operatorname{tang} B = \dfrac{\operatorname{tang} 2\beta}{\sin 2(\beta + f)}$ ist.

Bei $f = 0^\circ = 90^\circ = \ldots.$ ist die Intensität $= \tfrac{1}{2}A^2 [1 - \cos^2 2\beta]$, und dadurch entsteht ein gleichförmiges, freilich meist schwaches Kreuz. Im Uebrigen lassen sich die Maxima und Minima nicht allgemein bestimmen, doch ist hier der besondere Umstand zu bemerken, daſs wenn β klein und $(\beta + f)$ sehr klein ist, B bei einer unbedeutenden Aenderung von f sehr schnell aus $+90^\circ$ in -90° übergehen kann, also $\cos(\Delta - B)$ sehr schnell von $+\sin\Delta$ in $-\sin\Delta$, wodurch die Maxima und Minima der Ringe plötzlich ihre Stellen vertauschen und namentlich den Ringen einaxiger Crystalle das Ansehn elliptischer Ringe ertheilen. Fünftens sei $\alpha = 0^\circ$, so erhält man

$$I = \tfrac{1}{2}A^2 \{1 + \cos 2f \cos 2\beta \cos 2(\beta + f) + \sin 2f \sqrt{[\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta \sin^2 2(\beta + f)} \cos(\Delta + B)\}, \qquad (30)$$

ein Ausdruck, der eine der vorigen ähnliche Entwicklung zuläſst.

Wenn man endlich bei $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 0^\circ$, β in $\beta - 90^\circ$ und zugleich f in $-f$ ändert, so bleiben die Formeln (29) und (30) unverändert; wird also das Licht grade ebenso links elliptisch polarisirt, wie zuerst rechts elliptisch, so bleiben die Erscheinungen dieselben, vorausgesetzt, daſs man sie jetzt in umgekehrter Ordnung herum betrachtet. Bei zweiaxigen Crystallen ändert sich jedoch die Form der hyperbolischen Linien. —

Polarisirt man das Licht erst nach dem Austritte aus der Crystallplatte circular oder elliptisch so findet man mit Beibehaltung der obigen Bezeichnungen folgende Gleichungen:

$$\xi_o = A \cos(\alpha + f) \sin x,$$

$$\xi_e = -A \sin(\alpha + f) \sin(x + \Delta),$$

$$\xi_r = A \cos(\alpha + f) \cos(\beta + \alpha + f) \sin x + A \sin(\alpha + f) \sin(\beta + \alpha + f) \sin(x + \Delta),$$

$$\xi'_r = A \cos(\alpha + f) \sin(\beta + \alpha + f) \sin(x - 90^\circ) - A \sin(\alpha + f) \cos(\beta + \alpha + f) \sin(x + \Delta - 90^\circ),$$

endlich

$$\xi = A \cos(\alpha + f) \cos(\alpha + \beta) \cos(\beta + \alpha + f) \sin x + A \sin(\alpha + f) \cos(\alpha + \beta) \sin(\beta + \alpha + f) \sin(x + \Delta)$$
$$+ A \cos(\alpha + f) \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \alpha + f) \sin(x - 90^\circ) - A \sin(\alpha + f) \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \alpha + f) \sin(x + \Delta - 90^\circ).$$

Hieraus zieht man die resultirende Intensität

$$I = \tfrac{1}{2}A^2 [1 + \cos 2(\alpha + f) \cos 2(\alpha + \beta) \cos 2(\beta + \alpha + f)$$
$$+ \sin 2(\alpha + f) \cos 2(\alpha + \beta) \sin 2(\beta + \alpha + f) \cos \Delta - \sin 2(\alpha + f) \sin 2(\alpha + \beta) \sin \Delta]. \qquad (31)$$

Diese Formel stimmt vollkommen mit (25) überein, wenn man die beiden polarisirenden Spiegel mit einander vertauscht denkt.

6. Farbenringe um die Axen der Crystallplatten, wenn das Licht auf beiden Seiten circular oder elliptisch polarisirt wird.

Geht der einfallende nach PT_1 (Fig. 50.) polarisirte Strahl von einer Intensität $= A^2$ erst durch ein Fresnelsches Parallelopiped $R_1\,Pr_1$, darauf nach PO und PE durch die Crystallplatte, dann durch ein anderes Fresnelsches Parallelopiped $R_2\,Pr_2$, und wird er endlich nach PT_2 geradlinig polarisirt, so bildet man wie vorher die Gleichungen für die Schwingungsweiten ξ_r, ξ'_r, ξ_o, ξ_e, ξ_ϱ, ξ'_ϱ und ξ; von diesen werden ξ_ϱ und ξ'_ϱ durch das zweite Parallelopiped bedingt, die andern behalten die obige Bedeutung. Man findet nach und nach, wenn $\angle R_1PT_1 = \beta$, $\angle R_2PT_2 = \beta'$, $\angle T_1PT_2 = \alpha$ und $\angle T_2PO = f$ ist,

$$\xi_r = A\cos\beta\sin x,$$

$$\xi'_r = A\sin\beta\sin(x - 90^\circ),$$

$$\xi_o = A\cos\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin x + A\sin\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ),$$

$$\xi_e = -A\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta) + A\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ+\varDelta),$$

$$\begin{aligned}\xi_\varrho = {} & A\cos(f+\beta')\cos\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin x + A\cos(f+\beta')\sin\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ)\\ & + A\sin(f+\beta')\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta) - A\sin(f+\beta')\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ+\varDelta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi'_\varrho = {} & A\sin(f+\beta')\cos\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ) - A\sin(f+\beta')\sin\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin x\\ & - A\cos(f+\beta')\cos\beta\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta-90^\circ) - A\cos(f+\beta')\sin\beta\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi = {} & A\cos\beta\cos\beta'\cos(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\sin x + A\sin\beta\cos\beta'\cos(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ)\\ & + A\cos\beta\cos\beta'\sin(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta)\\ & \qquad - A\sin\beta\cos\beta'\sin(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta-90^\circ)\\ & + A\cos\beta\sin\beta'\sin(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x-90^\circ) - A\sin\beta\sin\beta'\sin(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\sin x\\ & - A\cos\beta\sin\beta'\cos(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta-90^\circ)\\ & \qquad - A\sin\beta\sin\beta'\cos(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\sin(x+\varDelta).\end{aligned}$$

Aus der letztern Gleichung zieht man die resultirende Intensität I nach §. II. (4); so ergiebt sich

$$\begin{aligned}I = A^2 [& -\sin\beta\cos\beta'\cos(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f) + \cos\beta\cos\beta'\sin(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\sin\varDelta\\ & + \sin\beta\cos\beta'\sin(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\cos\varDelta - \cos\beta\sin\beta'\sin(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\\ & + \cos\beta\sin\beta'\cos(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\cos\varDelta - \sin\beta\sin\beta'\cos(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\sin\varDelta]^2\\ + A^2 [& \cos\beta\cos\beta'\cos(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f) + \cos\beta\cos\beta'\sin(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\cos\varDelta\\ & - \sin\beta\cos\beta'\sin(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\sin\varDelta - \sin\beta\sin\beta'\sin(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\\ & - \cos\beta\sin\beta'\cos(f+\beta')\sin(\beta+\alpha+f)\cos\varDelta - \sin\beta\sin\beta'\cos(f+\beta')\cos(\beta+\alpha+f)\cos\varDelta]^2,\end{aligned}$$

oder nach den nöthigen Reductionen

$$\begin{aligned}I = \tfrac{1}{2}A^2 [& 1 + \cos 2\beta\cos 2\beta'\cos 2(f+\beta')\cos 2(\beta+\alpha+f)\\ & + \cos 2\beta\cos 2\beta'\sin 2(f+\beta')\sin 2(\beta+\alpha+f)\cos\varDelta - \sin 2\beta\sin 2\beta'\cos\varDelta\\ & - \sin 2\beta\cos 2\beta'\sin 2(f+\beta')\sin\varDelta - \cos 2\beta\sin 2\beta'\sin 2(\beta+\alpha+f)\sin\varDelta]. \quad (32)\end{aligned}$$

Bringt man den variabeln Theil unter die Form

$$\cos 2\beta' \sin 2(f+\beta')[\cos 2\beta \sin 2(\beta+\alpha+f)\cos\Delta - \sin 2\beta \sin\Delta]$$
$$-\sin 2\beta' [\cos 2\beta \sin 2(\beta+\alpha+f)\sin\Delta + \sin 2\beta\cos\Delta],$$

und setzt

$$\tang B = \frac{\tang 2\beta}{\sin 2(\beta+\alpha+f)},$$

so verwandelt sich der Ausdruck in

$$[\cos 2\beta' \sin 2(\beta+f')\cos(\Delta+B) - \sin 2\beta' \sin(\Delta+B)]\sqrt{\{\cos^2 2\beta \sin^2 2(\beta+\alpha+f)+\sin^2 2\beta\}}.$$

Setzt man hierin wieder

$$\tang B' = \frac{\tang 2\beta'}{\sin 2(f+\beta')},$$

so wird aus ihm

$$\sqrt{\{\cos^2 2\beta \sin^2 2(\beta+\alpha+f)+\sin^2 2\beta\}}\,\{\cos^3 2\beta' \sin^2 2(f+\beta')+\sin^2 2\beta'\}\cos(\Delta+B+B').$$

Nach dieser Formveränderung stellt sich die resultirende Intensität auf

$$I = \tfrac{1}{2}A^2\,[1+\cos 2\beta \cos 2\beta' \cos 2(f+\beta')\cos 2(\beta+\alpha+f)$$
$$+\sqrt{\{\cos^2 2\beta \sin^2 2(\beta+\alpha+f)+\sin^2 2\beta\}}\,\{\cos^2 2\beta' \sin^2 2(f+\beta')+\sin^2 2\beta'\}\cos(\Delta+B+B')]. \quad (33)$$

Man bemerkt sogleich, dafs diese Formel eine ähnliche Discussion zuläfst, wie die vorher geführte, darum will ich nur zwei bemerkenswerthe specielle Fälle berühren. Erstens mögen beide Fresnelsche Parrallelopipeden rechts oder beide links circular polarisiren; dann ist $\beta=\beta'=\pm 45^0$. Substituirt man diese Werthe in (32), so erhält man

$$I = A^2 \sin^2\frac{\Delta}{2}. \quad (34)$$

Zweitens polarisire das eine Parallelopiped rechts, das andere links circular, so hat man $\beta=\pm 45^0$ und $\beta'=\mp 45^0$; die Gleichung (32) wird jetzt

$$I = A^2 \cos^2\frac{\Delta}{2}. \quad (35)$$

Beide Formeln (34) und (35) geben Ringe oder Lemniscaten von überall gleicher Intensität in den Maximis und Minimis, und es findet keine Unterbrechung derselben durch ein dunkles Kreuz oder hyperbolische Curven statt. Die Erscheinungen in beiden Fällen unterscheiden sich dadurch, dafs im erstern das Centrum oder die Centra dunkel, im andern hell sind, und dafs dem entsprechend die Maxima und Minima ihre Stellen vertauschen.

7. Farbencurven durch Crystallplatten, die parallel zur Axe π geschnitten sind.

In den bisherigen Fällen haben wir die wichtigsten Erscheinungen untersucht, welche polarisirtes Licht bei seinem Durchgange durch senkrecht gegen die Axe π geschnittene Crystallplatten darbietet. Wenn aber die Oberflächen der Platten gegen diese Axe geneigt sind, so giebt es noch einige specielle Verhältnisse, unter denen eigenthümliche Farbencurven entstehen, die Müller zum Gegenstande der Untersuchung gemacht hat, und die ich wenigstens kurz zu erläutern nicht unterlassen will. Ich wähle zuerst den interessantesten Fall, dafs die Oberflächen der Platten parallel zur Axe π liegen, und nehme dabei nur auf einaxige Crystalle Rücksicht, obschon man sich ohne weitere Mühe über-

zeugen wird, dafs dieselben Formeln auch auf zweiaxige Crystalle übertragen werden können, sofern man nur bei ihnen für die Aequatorialaxe μ den Werth des Radius vector im Durchschnitt durch $\nu\mu$ substituirt, der in der Oberfläche der Platte liegt. — Denkt man sich wieder polarisirtes Licht convergirend auf die Platte gelangen, um von einem Puncte aus in Kegelform durch den Crystall zu gehen, so falle ein beliebiger Strahl unter dem kleinen Winkel φ ein und liege gegen den Hauptschnitt im Azimuth ω; dann werden zunächst die Normalen zu den Wellenebenen der aus ihm entstehenden gebrochenen Strahlen die Winkel φ' und φ'' mit der Normale zur brechenden Fläche einschliefsen, und ferner bilden die Polarisationsrichtungen dieser Strahlen mit der Einfallsebene die Winkel x' und x'', die oben §. XIV. bestimmt wurden. Man hat aber nach (5) des genannten §., wenn man die dort gebrauchten Bezeichnungen beibehält,

$$\sin x' = \frac{\varDelta \sin\omega}{\sqrt{(1-\gamma'^2)}},$$

oder, da im jetzigen Falle $C = 0$ und $\varDelta = 1$ ist,

$$\sin x' = \frac{\sin\omega}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi'\cos^2\omega)}} = \sin\omega\left\{1+\tfrac{1}{2}\varphi'^2\cos^2\omega\right\};$$

ebenso aus §. XIV. (2)

$$\cos x'' = \sin\omega\left\{1+\tfrac{1}{2}\varphi''^2\cos^2\omega\right\}.$$

Aus diesen beiden Formeln folgt, dafs so lange der Winkel φ nach der Annahme klein bleibt, die Polarisationsrichtung des gewöhnlichen Strahls nahe im Hauptschnitt, des ungewöhnlichen nahe senkrecht gegen den Hauptschnitt liegt. Aber diese unbedeutenden Abweichungen können hier gar nicht in Betracht kommen, wo durch sie offenbar nur eine geringe Aenderung in der resultirenden Intensität bewirkt wird, während die mit Recht vernachlässigte Reflexion bedeutend gröfsere veranlafst. Bezeichnen wir also mit P (Fig. 51.) den Einfallspunct eines nach PT_1 polarisirten Strahles von einer Intensität $= 1$ (ich will hier lieber $\varDelta^2$ vermeiden, um keine Verwechslung mit dem aus XIV. herübergenommenen $\varDelta$ zu veranlassen), nehmen die Polarisationsrichtung des gewöhnlichen Strahls nach dem Hauptschnitte PO, des ungewöhnlichen senkrecht dazu nach PE, lassen den letztern beim Durchgange durch den Crystall jenem um $\frac{\delta}{\lambda}$ Undulationen voraneilen, und setzen dazu, dafs beide Strahlen späterhin nach PT_2 polarisirt werden, wobei $\angle OPT_1 = p$ und $\angle T_1PT_2 = \alpha$ sei, so ergeben sich die folgenden Gleichungen für die Schwingungsweiten ξ_o, ξ_e, ξ:

$$\xi_o = \cos p \sin x,$$
$$\xi_e = \sin p \sin(x+\varDelta),$$
$$\xi = \cos p \cos(p+\alpha)\sin x + \sin p \sin(p+\alpha)\sin(x+\varDelta).$$

Aus der letzten Gleichung folgt die resultirende Intensität

$$I = [\sin p \sin(p+\alpha)\sin\varDelta]^2 + [\cos p\cos(p+\alpha) + \sin p \sin(p+\alpha)\cos\varDelta]^2,$$

oder nach den erforderlichen Reductionen

$$I = \cos^2(2p+\alpha) + \sin 2p \sin 2(p+\alpha)\cos^2\frac{\varDelta}{2}. \quad (36)$$

Wenn man in dieser Formel $p = 0^\circ = 90^\circ = \ldots.$ setzt, wobei die Polarisationsrichtungen der Spiegel parallel oder senkrecht zum Hauptschnitte stehen, so folgt

$$I = \cos^2\alpha, \quad (37)$$

das heifst, die Intensität hängt nur von der Lage der Spiegel gegen einander und nicht von der Crystallplatte ab; sie ist Null bei gekreuzten, 1 bei parallelen Spiegeln. Dieser Fall hat gar nichts Merkwürdiges. Im Gegensatze zu ihm steht die Annahme, dafs $p = \pm 45^0$ oder $\pm 135^0$ sei. Man erhält jetzt

$$I = \sin^2\alpha + \cos 2\alpha \cos^2\frac{\Delta}{2},$$

folglich bei parallelen Spiegeln

$$I = \cos^2\frac{\Delta}{2}, \quad (38)$$

und bei gekreuzten

$$I = \sin^2\frac{\Delta}{2}. \quad (39)$$

Beide Erscheinungen verhalten sich complementär zu einander, und hängen vom Werthe ab, den Δ hat. Um ihn zu bestimmen, bezeichne $ABCD$ (Fig. 52.) einen Durchschnitt durch die Crystallplatte, $PF = T$ sei ihre Dicke, SP der unter dem Winkel φ und im Azimuth ω einfallende Strahl, PO und PE die Normalen zu der gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Wellenebene, wonach $\angle OPF = \varphi'$ und $\angle EPF = \varphi''$ ist. Nun hat die ungewöhnliche Wellenebene durch den Crystall den Weg PE, die gewöhnliche den Weg PO und aufserdem in der Luft noch den Weg OG zurückzulegen, bis sie mit jener wieder in ein und dieselbe Ebene kommt, die sich gegen CD unter dem Winkel φ neigt. Der ungewöhnliche Strahl macht auf seinem Wege $\frac{T}{\cos\varphi''.e\lambda}$ Undulationen, der gewöhnliche $\frac{T}{\cos\varphi'.o\lambda} + \frac{OG}{\lambda}$ Undulationen, und da beide in derselben Zeit gleich viele Undulationen machen, so ist jener diesem um $\frac{\delta}{\lambda} = \left[\frac{T}{\cos\varphi'.o\lambda} + \frac{OG}{\lambda} - \frac{T}{\cos\varphi''.e\lambda}\right]$ Undulationen vorausgeeilt. Nach den frühern Angaben über die doppelte Brechung ist aber $o^2 = \mu^2$, $\sin\varphi' = \mu\sin\varphi$, $e^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\gamma''^2 = \pi^2 - (\pi^2 - \mu^2)\sin^2\varphi''\cos^2\omega$, $\sin\varphi'' = e\sin\varphi$, und aufserdem giebt die Figur $OG = T(\tang\varphi'' - \tang\varphi')\sin\varphi$. Vernachlässigt man also die höhern Potenzen als φ^2, so findet man

$$\frac{T}{\cos\varphi''.o\lambda} = \frac{T}{\lambda}\left(\frac{1}{\mu} + \tfrac{1}{2}\mu\varphi^2\right), \quad \frac{OG}{\lambda} = \frac{T}{\lambda}(\pi - \mu)\varphi^2 \text{ und}$$

$$\frac{T}{\cos\varphi''.e\lambda} = \frac{T}{\lambda}\left(\frac{1}{\pi} + \tfrac{1}{2}\pi\varphi^2 + \tfrac{1}{2}\frac{\pi^2 - \mu^2}{\pi}\varphi^2\cos^2\omega\right);$$

substituirt man diese Werthe in den Ausdruck für $\frac{\delta}{\lambda}$, so erhält man

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{T}{\lambda}\left[\frac{\pi - \mu}{\pi\mu} + \tfrac{1}{2}(\pi - \mu)\left(1 - \frac{\pi + \mu}{\pi}\cos^2\omega\right)\varphi^2\right].$$

Betrachten wir nach dieser Berechnung nur die Formel (39), so liegen die Minima der Intensität bei $\sin^2\frac{\Delta}{2} = 0$, und die Maxima bei $\sin^2\frac{\Delta}{2} = 1$. Allein in der Mitte der Platte bei $\varphi = 0^0$ wird $\frac{\delta}{\lambda} = \frac{T}{\lambda}\left(\frac{\pi - \mu}{\pi\mu}\right)$, und dies ist der constante Unterschied im Gange der beiden Strahlen, von welchem die übrigen ausgehen. Beträgt dieser Unterschied n ganze plus dem Bruchtheil m Undulationen, so finden sich die sich folgenden Minima bei

$$\frac{T}{\lambda}\left[\frac{\pi-\mu}{\pi\mu}+\tfrac{1}{2}(\pi-\mu)\left(1-\frac{\pi+\mu}{\pi}\cos^2\omega\right)\varphi^2\right]= \quad n \quad = n\pm 1 = n\pm 2 = n\pm 3 = \ldots,$$

und die Maxima bei

$$\frac{T}{\lambda}\left[\frac{\pi-\mu}{\pi\mu}+\tfrac{1}{2}(\pi-\mu)\left(1-\frac{\pi+\mu}{\pi}\cos^2\omega\right)\varphi^2\right]=n\pm\tfrac{1}{2}=n\pm\tfrac{3}{2}=n\pm\tfrac{5}{2}=n\pm\tfrac{7}{2}=\ldots,$$

oder die Minima bei

$$\tfrac{1}{2}\frac{T}{\lambda}(\pi-\mu)\left(1-\frac{\pi+\mu}{\pi}\cos^2\omega\right)\varphi^2=\begin{cases}-\ m \quad =-(1+m)=-(2+m)=-(3+m)=\ldots\\ +(1-m)=+(2-m)=+(3-m)=+(4-m)=\ldots,\end{cases}$$

und die Minima bei

$$\tfrac{1}{2}\frac{T}{\lambda}(\pi-\mu)\left(1-\frac{\pi+\mu}{\pi}\cos^2\omega\right)\varphi^2=-m+\tfrac{1}{2}\begin{cases}=-(\tfrac{1}{2}+m)=-(\tfrac{3}{2}+m)=-(\tfrac{5}{2}+m)=\ldots\\ =+(\tfrac{3}{2}-m)=+(\tfrac{5}{2}-m)=+(\tfrac{7}{2}-m)=\ldots\end{cases}$$

Jeder Ausdruck enthält eine Reihe negativer und eine Reihe positiver Glieder, die abgesehen vom Zeichen bei $m=0$ und $m=\frac{1}{2}$ einander gleich sind; das Glied $-m+\frac{1}{2}$ bei den Maximis kann zur obern oder untern Reihe kommen, je nachdem m gröſser oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Wir wollen zur Abkürzung die Glieder der Reihen allgemein mit $-M$ und $+M'$ bezeichnen, dann ergiebt sich die Lage der Maxima und Minima erstens aus

$$\varphi^2=\frac{2\lambda M}{T(\pi-\mu)\left(\frac{\pi+\mu}{\pi}\cos^2\omega-1\right)},$$

und zweitens aus

$$\varphi^2=-\frac{2\lambda M'}{T(\pi-\mu)\left(\frac{\pi+\mu}{\pi}\cos^2\omega-1\right)},$$

oder, wenn man in der letztern Gleichung für ω den Werth $90^\circ+\Omega$ setzt, aus

$$\varphi^2=\frac{2\lambda M'}{T.\frac{\mu}{\pi}(\pi-\mu)\left(\frac{\pi+\mu}{\mu}\cos^2\Omega-1\right)}.$$

Nun ist nach Nummer **4.** dieses §. die Polargleichung einer Hyperbel

$$\varphi^2=\frac{c^2}{\frac{a^2+c^2}{a^2}\cos^2\omega-1},$$

worin φ den Radius vector, a die halbe groſse, c die halbe kleine Axe, und ω den Winkel zwischen φ und a bezeichnet. Vergleicht man diesen Ausdruck mit den vorhergehenden, so findet man sogleich, daſs die zusammengehörigen Maxima und Minima Hyperbeln bilden, deren Axen parallel und senkrecht zum Hauptschnitte liegen; in den erstern ist $c^2=\frac{2\lambda M}{T(\pi-\mu)}$, $\frac{a^2+c^2}{a^2}=\frac{\pi+\mu}{\pi}$, folglich $a^2=\frac{\pi}{\mu}.\frac{2\lambda M}{T(\pi-\mu)}$ in den andern ist $c^2=\frac{\pi}{\mu}.\frac{2\lambda M'}{T(\pi-\mu)}$ und $a^2=\frac{2\lambda M'}{T(\pi-\mu)}$. Setzt man überdies den Winkel, welchen die Asymptoten der erstern Hyperbeln mit einander einschlieſsen, $=s$, so bestimmt man ihn durch $\cos\frac{s}{2}=\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{\pi+\mu}\right)}$, und ebenso den Asymptoten-

winkel s' der andern Hyperbeln durch $\cos\frac{s'}{2} = \sqrt{\left(\frac{\mu}{\pi+\mu}\right)}$. — Nach den beigebrachten Angaben ist es einfach, die Form und die Lage der Hyperbeln zu verzeichnen, um sich die Erscheinungen bei gekreuzten und damit auch die complementären bei parallelen Spiegeln anschaulich zu machen.

8. Farbencurven durch einaxige Crystallplatten, deren Oberflächen gegen die Axe π beliebig geneigt sind.

Sind die Oberflächen der Crystallplatte gegen die Axe π unter einem Winkel geneigt, dessen Cosinus überhaupt $= A$ und dessen Sinus $= C$ ist, so erhält man, wenn die übrigen Verhältnisse bleiben, wie sie in der vorigen Nummer angegeben wurden, aus §. XIV. (5)

$$\sin x' = \frac{A \sin\omega}{\sqrt{[1-(C-\frac{1}{2}C\varphi'^2 + A\varphi'\cos\omega)^2]}};$$

dieser Ausdruck giebt, so lange nicht A sehr klein wird, immer noch ziemlich genau $\sin x' = \sin\omega$, denn selbst wenn der Neigungswinkel der Oberfläche gegen die Axe 45° beträgt, stellt sich

$$\sin x' = \sin\omega\,[1-\tfrac{1}{2}(\varphi'^2 \sin^2\omega - \varphi'\cos\omega)],$$

also nahe genug $= \sin\omega$. Wir wollen demnach bei den vorliegenden Platten annehmen, dafs der gewöhnlich gebrochene Strahl im Hauptschnitte, der ungewöhnlich gebrochene senkrecht dagegen schwinge; dann giebt die Intensitätsgleichung (36) auch hier die besten Figuren, wenn die durch die Spiegel bedingten Polarisationsrichtungen der Strahlen unter 45° gegen den Hauptschnitt liegen, und wir haben bei parallelen Spiegeln wieder $I = \cos^2\frac{\Delta}{2}$, bei gekreuzten $I = \sin^2\frac{\Delta}{2}$. Zur Bestimmung von Δ giebt Fig. 52.

$$\frac{\delta}{\lambda} = \left[\frac{T}{\cos\varphi'.\,o\lambda} + \frac{OG}{\lambda} - \frac{T}{\cos\varphi''.\,e\lambda}\right],$$

wobei $o^2 = \mu^2$, $\sin\varphi' = \mu\sin\varphi$, $e^2 = \pi^2 - (\pi^2-\mu^2)(C\cos\varphi'' + A\sin\varphi''\cos\omega)^2$, $\sin\varphi'' = e\sin\varphi$, $OG = T(\operatorname{tang}\varphi'' - \operatorname{tang}\varphi')\sin\varphi$ ist, also

$$\frac{T}{\cos\varphi'.\,o\lambda} = \frac{T}{\lambda}\left(\frac{1}{\mu} + \tfrac{1}{2}\mu\varphi^2\right), \qquad \frac{OG}{\lambda} = \frac{T}{\lambda}\,[\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)} - \mu]\,\varphi^2,$$

$$\frac{T}{\cos\varphi''.\,e\lambda} = \frac{T}{\lambda}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}} + \varphi^2\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)} - \frac{\frac{1}{2}\pi^2\varphi^2}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}}$$
$$+\tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\left(\frac{A^2\varphi^2\cos^2\omega}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}} + \frac{2AC\varphi\cos\omega}{\pi^2A^2+\mu^2C^2}\right)\Bigg].$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Ausdruck, so erhält man

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{T}{\lambda}\Bigg[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}} - \mu\right)\varphi^2$$
$$-\tfrac{1}{2}(\pi^2-\mu^2)\left(\frac{A^2\varphi^2\cos^2\omega}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}} + \frac{2AC\varphi\cos\omega}{\pi^2A^2+\mu^2C^2}\right)\Bigg].$$

Wenn man nun annimmt, dafs $\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}}$ oder der constante Unterschied im Gange beider Strahlen $= n$ Undulationen ist, denn der Kürze halber wollen wir den Bruchtheil m fortlassen,

so bestimmt man bei gekreuzten Spiegeln die Minima aus

$$\frac{1}{2}\frac{T}{\lambda}\left[\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{(\pi^2 A^2+\mu^2 C^2)}}-\mu\right)\varphi^2-(\pi^2-\mu^2)\left(\frac{A^2\varphi^2\cos^2\omega}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}}+\frac{2AC\varphi\cos\omega}{\pi^2A^2+\mu^2C^2}\right)\right]$$
$$=0=\begin{cases}-1=-2=-3=\dots\\+1=+2=+3=\dots,\end{cases}$$

und die Maxima aus

$$\frac{1}{2}\frac{T}{\lambda}\left[\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{(\pi^2 A^2+\mu^2 C^2)}}-\mu\right)\varphi^2-(\pi^2-\mu^2)\left(\frac{A^2\varphi^2\cos^2\omega}{\sqrt{(\pi^2A^2+\mu^2C^2)}}+\frac{2AC\varphi\cos\omega}{\pi^2A^2+\mu^2C^2}\right)\right]$$
$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}=\dots\\+\frac{1}{2}=+\frac{3}{2}=+\frac{5}{2}=\dots\end{cases}$$

Die hierdurch entstehenden Curven trägt man wohl am leichtesten nach der Gleichung $y^2=\mathfrak{A}x^2+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}$ auf, indem man in den Bedingungsgleichungen φ und ω auf die zu einander rechtwinkligen Coordinaten x und y bringt, deren Anfangspunct in P ist und von denen die Axe der x längst der Projection des Hauptschnittes liegt. Ich will diese Umwandlung nicht ausführen, weil sie im Allgemeinen doch zu keinem bequemen Resultate leitet, und nur den einen Fall berühren, in welchem man die Curven wenigstens in ihrem Anfange leicht übersehen kann. Nimmt man nämlich φ so klein an, dafs man gegen φ schon φ^2 vernachlässigen darf, und setzt $A=C=\sqrt{\frac{1}{2}}$, damit weder A noch C klein werde, so kann man in den obigen Bedingungsgleichungen allein das Glied $\frac{2AC\varphi\cos\omega}{\pi^2A^2+\mu^2C^2}$ $=\frac{2\varphi\cos\omega}{\pi^2+\mu^2}$ behalten, und bekommt zur Bestimmung der Minima

$$\frac{T}{\lambda}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2+\mu^2}\varphi\cos\omega=0=\pm1=\pm2=\pm3=\dots,$$

und für die Maxima

$$\frac{T}{\lambda}\cdot\frac{\pi^2-\mu^2}{\pi^2+\mu^2}\varphi\cos\omega=\pm\tfrac{1}{2}=\pm\tfrac{3}{2}=\pm\tfrac{5}{2}=\dots;$$

dies giebt für jene

$$\varphi=0=\pm\frac{\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)\cos\omega}=\pm\frac{2\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)\cos\omega}=\dots$$

für diese

$$\varphi=\pm\frac{\frac{1}{2}\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)\cos\omega}=\pm\frac{\frac{3}{2}\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)\cos\omega}=\dots$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen ergeben sich als Farbencurven grade Linien, die senkrecht gegen den Hauptschnitt laufen, und die von P in den Minimis um 0, $\pm\frac{\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)}$, ... in den Maximis um $\pm\frac{\frac{1}{2}\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)}$, $\pm\frac{\frac{3}{2}\lambda(\pi^2+\mu^2)}{T(\pi^2-\mu^2)}$, ... abstehen. Am sichersten wird man sie durch Crystallplatten sehen, in denen π und μ wenig differiren.

§. XVII.

Ueber die Farbenringe um die Axe des Bergcrystalls.

Der Quarz gehört zu den einaxigen Crystallen; allein die im vorigen §. näher untersuchten Ringe, welche polarisirtes Licht nach seinem Durchgange durch senkrecht gegen die Axe geschnittene Platten hervorbringt, zeigen bei ihm höchst abweichende Formen, die mit der von Biot entdeckten Eigenthümlichkeit desselben zusammenhangen, daſs er die Polarisationsebene eines zur Axe parallel hindurchgehenden Strahls theils rechts theils links dreht. Diese Drehungskraft besitzen auſser dem Quarz auch einige Flüssigkeiten, als Terpenthinöl, Syrup, wenngleich in geringerm Grade. Da wir nun von den letztern, wie von den übrigen Flüssigkeiten, bis jetzt nur wissen, daſs in ihnen die die Elasticitätskraft bedingenden Körpertheilchen gleichmäſsig vertheilt sind, woraus wir die Drehung nicht abzuleiten vermögen, so können wir bis jetzt ebenso wenig die angegebene besondere Eigenschaft des Quarzes erklären, dürfen sie namentlich nicht mit seiner Natur als eines einaxigen Mediums zusammenwerfen. Bei dieser Unbekanntschaft mit der vorauszusetzenden Elasticitätsvertheilung würde es am besten sein, das ganze Gebiet bis auf weitere Entdeckungen aus der Undulationstheorie fortzulassen, wenn nicht Airy mit Hülfe einiger Hypothesen die Erscheinungen, welche Quarzplatten in den Ringen liefern, auf eine Weise berechnet hätte, daſs er, ohne weiter auf die ersten Gründe zurückzugehen, sicher das Richtige getroffen hat, und wenn sich nicht überdies, wie das Folgende zeigen wird, dasselbe Verfahren auch so umgestalten lieſse, daſs man, die noch nicht erklärte Drehungskraft des Quarzes als eine Thatsache annehmend, die Abänderungen in seinen Ringsystemen vollständig nachweisen, und dadurch schon jetzt in diesem Theile einen auch für die Folge gesicherten Abschnitt der Undulationstheorie gewinnen könnte. Ich werde daher zuerst die Ansicht angeben, welche man sich von der Drehung der Polarisationsebene zu bilden hat, und dann die unter verschiedenen Umständen bei Quarzplatten hervortretenden Ringsysteme erläutern.

1. Die Drehung der Polarisationsebene eines durch eine Quarzplatte parallel zur Axe hindurchgegangenen Strahles.

Man unterscheidet zunächst rechts und links drehende Bergcrystalle, und kann nach Doves Untersuchung die zu der einen oder andern Art gehörigen Species schon aus der Crystallform erkennen. Nimmt man eine senkrecht zur Axe geschnittene Platte eines rechts drehenden Crystalls und läſst einen polarisirten Lichtstrahl senkrecht hindurchgehen, so findet man, daſs sich nach dem Durchgange seine Polarisationsebene im Allgemeinen nach rechts gewandt hat, und als nähere Bestimmung, daſs bei gleichem Strahle der Drehungswinkel mit der Dicke der Platte proportional wächst, während bei gleich dicken Platten diejenigen Strahlen, welche die kürzeste Wellenlänge besitzen, am stärksten gedreht werden. Die links drehenden Crystalle bieten dieselbe Erscheinung dar, nur wenden sie die Polarisationsrichtung nach links herum. Zur Erläuterung dieser Thatsache hat Fresnel zuerst gezeigt, daſs man in der Undulationstheorie bei der zu suchenden Erklärung davon ausgehen müſse, diese Drehung als ein Resultat von zwei entgegengesetzten, gleich intensiven, circular polarisirten Strahlen zu betrachten, nämlich von einem rechts und einem links circularen, von denen bei rechts drehenden

Crystallen der rechts circulare, bei links drehenden der links circulare schneller durch den Crystall hindurchdringe, und wobei der Unterschied in der Schnelligkeit für die verschiedenen Farbestrahlen verschieden sei. Um diese Grundansicht durch ein Experiment zu bekräftigen, suchte er die beiden hypothetisch angenommenen circularen Strahlen durch ein gegen die Platte gelegtes Prisma wegen ihrer ungleichen Brechung von einander zu trennen, und erreichte in der That seinen Zweck so vollständig, dafs seine Annahme durch die Erfahrung bestätigt gegen allen Zweifel gesichert ist. Es falle also ein nach PT_1 (Fig. 53.) polarisirter Lichtstrahl von einer Intensität $= R^2$ auf eine rechts drehende Quarzplatte; man zerlege ihn in einen rechts und einen links circularen, und bezeichne die Schwingungsweite des erstern nach PT_1 und senkrecht dazu nach Pt mit ξ_r und ξ'_r, und des andern ebenfalls nach PT_1 und Pt mit ξ_l und ξ'_l, so wird

$$\xi_r = \tfrac{1}{2}R\sin x,\quad \xi'_r = \tfrac{1}{2}R\sin(x-90^\circ),\quad \xi_l = \tfrac{1}{2}R\sin x,\quad \xi'_l = -\tfrac{1}{2}R\sin(x-90^\circ).$$

Wenn nun diese beiden circularen Strahlen gleich schnell durch den Crystall gingen, so wäre die gemeinsame Schwingungsweite nach $Pt = o$ und nach $PT_1 = \xi = R\sin x$, d. h. der Strahl würde geradlinig polarisirt in seiner bisherigen Polarisationsrichtung durch den Crystall hindurchgehen, wie zu erwarten war. Läfst man dagegen den links circularen um eine Strecke $= \delta'$ nachbleiben, so verwandeln sich die Schwingungsgleichungen nach dem Durchgange durch die Quarzplatte, wenn man zur Abkürzung $\frac{2\pi\delta'}{\lambda} = \varDelta'$ setzt, in

$$\xi_r = \tfrac{1}{2}R\sin x,\quad \xi'_r = \tfrac{1}{2}R\sin(x-90^\circ),\quad \xi_l = \tfrac{1}{2}R\sin(x-\varDelta'),\quad \xi'_l = -\tfrac{1}{2}R\sin(x-90^\circ-\varDelta').$$

Man untersuche diese Strahlen durch einen neuen polarisirenden Spiegel, der nach PT_2 gerichtet ist, und drehe ihn um einen Winkel α rechts von PT_1, bis er das volle Licht R^2 reflectirt. Man findet zunächst bei jedem beliebigen Winkel α die gemeinsame Schwingungsweite ξ der auf PT_2 gebrachten vier Wellen

$$\xi = \tfrac{1}{2}R[\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\sin(x-90^\circ) + \cos\alpha\sin(x-\varDelta') - \sin\alpha\sin(x-90^\circ-\varDelta')],$$

und daraus die Intensität

$$I = \tfrac{1}{4}R^2[-\sin\alpha - \cos\alpha\sin\varDelta' + \sin\alpha\cos\varDelta']^2 + \tfrac{1}{4}R^2[\cos\alpha + \cos\alpha\cos\varDelta' + \sin\alpha\sin\varDelta']^2,$$

oder

$$I = \frac{R^2}{2}[1 + \cos(2\alpha - \varDelta')].$$

Soll hier $I = R^2$ werden, so mufs $\cos(2\alpha - \varDelta') = 1$ sein, woraus

$$2\alpha = \varDelta'$$

folgt. Nach dieser Angabe wird die Polarisationsrichtung des Strahls um einen Winkel $\alpha = \frac{\pi\delta'}{\lambda}$ aus ihrer ursprünglichen Richtung nach PT_1 abgelenkt. Drehen wir zum Ueberflufs noch PT_2 um einen Winkel $= \alpha + 90^\circ$, so darf er kein Licht reflectiren. Wir finden für diese Lage des Spiegels die Schwingungsweite ξ' der vier Wellen aus

$$\xi' = \tfrac{1}{2}R[-\sin\alpha\sin x + \cos\alpha\sin(x-90^\circ) - \sin\alpha\sin(x-\varDelta') - \cos\alpha\sin(x-90^\circ-\varDelta')],$$

und die Intensität

$$I' = \tfrac{1}{4}R^2[\cos\alpha + \sin\alpha\sin\varDelta' + \cos\alpha\cos\varDelta']^2 + \tfrac{1}{4}R^2[-\sin\alpha - \sin\alpha\cos\varDelta' + \cos\alpha\sin\varDelta']^2,$$

oder

$$I' = \frac{R^2}{2}[1 - \cos(2\alpha - \varDelta')];$$

soll $I = 0$ werden, so mufs wieder $\cos(2\alpha - \Delta') = 1$, oder $2\alpha = \Delta'$ sein. Bei links drehenden Platten ist Δ' negativ und $2\alpha = -\Delta'$. — Man ersieht aus der Berechnung, dafs die Annahme zweier circulärer Strahlen den Beobachtungen Genüge leistet; diese haben nur noch anzugeben, ob δ' für alle Strahlen des weifsen Lichtes eine constante oder veränderliche Gröfse ist. Hierfür hat Biot aus seinen zahlreichen Beobachtungen gefolgert, dafs der Drehungswinkel α für verschiedene Strahlen dem Quadrate ihrer Wellenlängen umgekehrt und der Dicke der Platten direct proportional ist; demnach müssen wir $\delta' = \frac{dT}{\lambda}$ oder $\Delta' = \frac{2\pi dT}{\lambda^2}$ setzen, worin d eine constante Gröfse und T die Dicke der Platten bezeichnet. Die von Biot berechnete Tabelle giebt nämlich bei 1^{mm} dicken Platten für die verschiedenen Strahlen folgende Ablenkungswinkel:

Name der Strahlen.	α.
Aeufserstes Roth	17°,4964
Grenze zwischen Roth und Orange . .	20,4798
- - - Orange und Gelb . .	22,3138
- - - Gelb und Grün . . .	25,6752
- - - Grün und Blau . . .	30,0460
- - - Blau und Dunkelblau .	34,5717
- - - Dunkelblau und Violett	37,6829
Aeufserstes Violett	44,0827

In einigen Fällen könnte es auch möglich sein, dafs die Drehung der Polarisationsebene durch zwei elliptische Wellen bewirkt würde; zerspalten wir also, um auch für diese Bedingung die allgemeine Formel zu finden, den einfallenden Strahl in zwei elliptische, in denen die Axen der Bahnellipsen im Verhältnisse von $R : R'$ stehen, so erhalten wir jetzt, wenn die übrigen Annahmen dieselben bleiben, die vier Schwingungsgleichungen

$$\xi_r = R \sin x, \quad \xi'_r = R' \sin(x - 90^0), \quad \xi_l = R \sin(x - \Delta'), \quad \xi'_l = -R' \sin(x - 90^0 - \Delta'),$$

daraus die gemeinsame Schwingungsweite ξ' nach PT_2, welches mit PT_1 einen Winkel $\alpha + 90^0$ bildet,

$$\xi' = -R \sin\alpha \sin x + R' \cos\alpha \sin(x - 90^0) - R \sin\alpha \sin(x - \Delta') - R' \cos\alpha \sin(x - 90^0 - \Delta'),$$

und

$$I' = [-R' \cos\alpha + R \sin\alpha \sin\Delta' + R' \cos\alpha \cos\Delta']^2 + [-R \sin\alpha - R \sin\alpha \cos\Delta' + R' \cos\alpha \sin\Delta']^2,$$

oder

$$I' = 4\left(R \sin\alpha \cos\frac{\Delta'}{2} - R' \cos\alpha \sin\frac{\Delta'}{2}\right)^2;$$

soll $I' = 0$ werden, so folgt

$$\tang\alpha = \frac{R'}{R} \tang\frac{\Delta'}{2}.$$

Dies wäre die Bedingungsgleichung für den Drehungswinkel α, wenn sich der polarisirte Strahl durch das drehende Medium in zwei ungleich schnellen elliptischen Wellen fortpflanzte.

2. Farbenringe um die Axe einer Quarzplatte, wenn das Licht auf beiden Seiten geradlinig polarisirt wird.

Wenn ein nach PT_1 (Fig. 53.) polarisirter Lichtbündel von einer Intensität $= A^2$ in derselben Weise auf eine Quarzplatte fällt, wie wir es bei den Untersuchungen im vorigen §. angenommen haben, so wird der gerade senkrecht hindurchgehende Strahl nur von der Drehungskraft des Quarzes afficirt, auf jeden andern dagegen, der unter einem beliebigen Winkel gegen die Axe geneigt ist, wird sowohl die Drehungskraft als auch die Elasticität des Quarzes als eines einaxigen Mittels einwirken, so dafs aus beiden Wirkungen zusammen die Elementarschwingungen entstehen, welche die gemeinsame Schwingung hervorbringen. Während nun die erstere Kraft eine rechts und eine links rotirende Schwingung von PT_1 aus erzeugen will, treibt die Elasticitätskraft des Quarzes die Schwingungen nach PO und PE, d. i. parallel und senkrecht zum Hauptschnitt, auch nimmt diese letzte Kraft um desto mehr zu, je gröfser der Winkel φ wird, den der einfallende Strahl mit der Axe bildet. Wir trennen also die ursprüngliche Schwingungsweite nach PT_1 in die beiden Theile $\mathfrak{R}$ und C, weisen jenen der Drehungskraft, diesen der Richtungskraft nach PO und PE zu, und setzen dabei das Verhältnifs von $\mathfrak{R} : C$ mit dem Winkel φ in der Art veränderlich, dafs C mit wachsendem φ gröfser und $\mathfrak{R}$ ziemlich schnell kleiner werde. Von diesen Theilen giebt $\mathfrak{R}$ eine rechts und eine links rotirende Schwingung, die wir der Allgemeinheit wegen als elliptische einführen und darum ihre Schwingungsaxen nach PT_1 mit R, nach Pt mit R' benennen; der Theil C trennt sich in die beiden Richtungen nach PO und PE. Nach dieser Voraussetzung finden beim Eintritt in den Crystall folgende Schwingungsgleichungen statt, wenn ξ_o und ξ_e die Schwingungsweiten nach PO und PE, ξ_r und ξ'_r die Schwingungsweiten des rechts elliptischen, ξ_l und ξ'_l des links elliptischen Strahls, nämlich ξ_r und ξ_l nach PT_1, ξ'_r und ξ'_l nach Pt bezeichnen und wenn der Winkel $T_1PO = \alpha + f$ gesetzt wird,

$$\xi_o = C\cos(\alpha+f)\sin x, \quad \xi_e = -C\sin(\alpha+f)\sin x, \quad \xi_r = R\sin x,$$
$$\xi_l = R\sin x, \quad \xi'_r = R'\sin(x-90^\circ), \quad \xi'_l = -R'\sin(x-90^\circ).$$

Bei dem Durchgange durch die Crystallplatte bleibt ξ_e gegen ξ_o zurück, da im Quarze die Axe π kleiner als μ ist, aufserdem bei rechts drehender Platte ξ_l und ξ'_l gegen ξ_r und ξ'_r, und bei links drehender ξ_r und ξ'_r gegen ξ_l und ξ'_l. Nimmt man zunächst nur eine rechts drehende Platte und läfst, wozu sich später die Gründe ergeben werden, die Verzögerung von ξ_e, ξ_l und ξ'_l eine gleich grofse sein, nämlich $= \delta' + \delta$ oder gleich der Summe aus den Verzögerungen der beiden rotirenden Strahlen gegen einander und des ungewöhnlichen gegen den gewöhnlichen, so verwandeln sich die Schwingungsgleichungen nach dem Austritt aus der Crystallplatte, wenn man zur Abkürzung $\frac{2\pi(\delta'+\delta)}{\lambda} = \Delta$ einführt, in die folgenden

$$\xi_o = C\cos(\alpha+f)\sin x, \quad \xi_e = -C\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta), \quad \xi_r = R\sin x,$$
$$\xi_l = R\sin(x-\Delta), \quad \xi'_r = R'\sin(x-90^\circ), \quad \xi'_l = -R'\sin(x-90^\circ-\Delta).$$

Man bringe diese Schwingungen durch einen neuen polarisirenden Spiegel nach PT_2, welches mit PT_1 den Winkel α einschliefst, so erhält man die gemeinsame Schwingung

$$\xi = C\cos f\cos(\alpha+f)\sin x + C\sin f\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta) + R\cos\alpha\sin x + R\cos\alpha\sin(x-\Delta)$$
$$+ R'\sin\alpha\sin(x-90^\circ) - R'\sin\alpha\sin(x-90^\circ-\Delta).$$

Wir müssen jetzt zunächst noch die wahren Werthe der Verhältnifszahlen C, R und R' ermitteln, damit sie der ursprünglichen Intensität des Lichtes $= A^2$ entsprechen. In den obigen sechs Schwingungsgleichungen befinden sich je drei in derselben Wellenebene und wirken zusammen; bringt man zuerst ξ_o, ξ_r und ξ'_r auf zwei zu einander rechtwinklige Richtungen, z. B. nach PO und PE, so erhält man die Schwingung nach $PO = (C+R)\cos(\alpha+f)\sin x + R'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$, nach $PE = -R\sin(\alpha+f)\sin x + R'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$, somit die Intensität der erstern $= (C+R)^2\cos^2(\alpha+f) + R'^2\sin^2(\alpha+f)$, der andern $= R^2\sin^2(\alpha+f) + R'^2\cos^2(\alpha+f)$; bringt man ebenso die drei andern Schwingungen auf die Richtungen nach PE und PO, so ist die gemeinsame nach $PE = -(C+R)\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta) - R'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta)$, nach $PO = R\cos(\alpha+f)\sin(x-\Delta) - R'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta)$, folglich die Intensitäten $= (C+R)^2\sin^2(\alpha+f) + R'^2\cos^2(\alpha+f)$ und $= R^2\cos^2(\alpha+f) + R'^2\sin^2(\alpha+f)$. Soll nun die gesammte Intensität oder $(C+R)^2 + 2R'^2 + R^2 = A^2$ sein, so wird zu den Verhältnifszahlen C, R, R' noch der Factor $\dfrac{A}{\sqrt{\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}}$ erfordert. Nach Einführung dieses Factors zieht man aus der Schwingungsgleichung nach PT_2 die resultirende Intensität

$$I = \frac{A^2}{(C+R)^2+2R'^2+R^2}\{-C\sin f\sin(\alpha+f)\sin\Delta - R\cos\alpha\sin\Delta - R'\sin\alpha + R'\sin\alpha\cos\Delta\}^2$$
$$+ \frac{A^2}{(C+R)^2+2R'^2+R^2}\{C\cos f\cos(\alpha+f) + C\sin f\sin(\alpha+f)\cos\Delta + R\cos\alpha + R\cos\alpha\cos\Delta + R'\sin\alpha\sin\Delta\}^2,$$

oder nach den nöthigen Reductionen

$$I = \frac{A^2}{(C+R)^2+2R'^2+R^2}\left\{C^2\cos^2(\alpha+2f)\sin^2\frac{\Delta}{2} + \left[(C+2R)\cos\alpha\cos\frac{\Delta}{2} + 2R'\sin\alpha\sin\frac{\Delta}{2}\right]^2\right\}. \quad (1)$$

Bevor wir auf die Erläuterung dieser Formel eingehen, will ich zeigen, wie sie mit der von Airy gegebenen in Uebereinstimmung zu bringen ist. Wenn in dem Obigen aus den beiden in Quarz vorhandenen Kräften die Elementarwellen hergeleitet wurden, in die der einfallende polarisirte Lichtstrahl zerfällt, so hat es doch wenig Wahrscheinlichkeit für sich, dafs die Lichtschwingungen nach den Angaben der Elementarwellen statt finden sollten, es werden sich vielmehr aus ihnen gemeinsame Schwingungen bilden, die auf der vereinigten Wirkung der beiden Kräfte beruhen. Um hierzu die Möglichkeit zu geben, wurde gleich anfangs ein gleiches Zurückbleiben der drei langsamer fortschreitenden Wellen angenommen; dadurch treten je drei zusammen und bilden eine elliptische Welle, in der die Richtung der Achsen von den Werthen abhängt, die man den Verhältnifszahlen C, R und R' beilegt, oder aus der man umgekehrt durch Annahme einer festen Axenrichtung eine Relation unter den Gröfsen C, R, R' findet. Zu der erstern Bestimmung fehlen die erforderlichen Data, dagegen liegt wegen der Natur des Quarzes als eines einaxigen Mediums die Vermuthung sehr nahe, dafs die Axen der elliptischen Wellen nach PO und PE gerichtet sind, nämlich nach den Linien, in welchen sich überhaupt nur die Schwingungen erhalten können. Wir wollen sehen, wohin uns diese Annahme führt; die gemeinsame Schwingung der Wellen ξ_o, ξ_r und ξ'_r nach PO ist $= (C+R)\cos(\alpha+f)\sin x + R'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$ oder $= I\sin(x+d)$, wenn man $\operatorname{tang} d = \dfrac{-R'\sin(\alpha+f)}{(C+R)\cos(\alpha+f)}$ setzt, die gemeinsame Schwingung nach PE ist

$= -R\sin(\alpha+f)\sin x + R'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^0)$ oder $= I'\sin(x+d')$, wenn man $\tang d' = \frac{R'\cos(\alpha+f)}{R\sin(\alpha+f)}$ setzt; sollen nun die Axen dieser rechts elliptischen Welle nach PO und PE fallen, so mufs $d' = d - 90^0$ oder $\tang d = -\frac{1}{\tang d'}$ sein; dies giebt $\frac{R'\sin(\alpha+f)}{(C+R)\cos(\alpha+f)} = \frac{R\sin(\alpha+f)}{R'\cos(\alpha+f)}$ oder $R'^2 = R(C+R)$.

Auf gleiche Weise findet man die gemeinsame Schwingung der drei Wellen ξ_e, ξ_l und ξ'_l nach $PE = -(C+R)\sin(\alpha+f)\sin(x-\varDelta) - R'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^0-\varDelta)$ oder $\mathfrak{J}\sin(x-\varDelta+\mathfrak{d})$, wo $\tang\mathfrak{d} = \frac{-R'\cos(\alpha+f)}{(C+R)\sin(\alpha+f)}$; und die gemeinsame Schwingung nach

$PO = R\cos(\alpha+f)\sin(x-\varDelta) - R'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^0-\varDelta)$ oder $= \mathfrak{J}'\sin(x-\varDelta-\mathfrak{d}')$, wo $\tang\mathfrak{d}' = \frac{R'\sin(\alpha+f)}{R\cos(\alpha+f)}$ ist; sollen auch hier die Axen dieser links elliptischen Bahn nach PE und PO liegen, so mufs $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} - 90^0$ oder $\tang\mathfrak{d} = -\frac{1}{\tang\mathfrak{d}'}$ sein, dies giebt $\frac{R'\cos(\alpha+f)}{(C+R)\sin(\alpha+f)} = \frac{R\cos(\alpha+f)}{R'\sin(\alpha+f)}$ oder wiederum $R'^2 = R(C+R)$. Will man also annehmen, dafs die Axen der entstehenden elliptischen Wellen, wie es doch am meisten wahrscheinlich ist, nach dem Hauptschnitte und senkrecht gegen ihn fallen, so hat man nur die Relation $R'^2 = R(C+R)$ aufzunehmen. Unter dieser Bedingung wird aus (1)

$$I = \frac{A^2}{(C+2R)^2}\left\{C^2\cos^2(\alpha+f)\sin^2\frac{\varDelta}{2} + \left[(C+2R)\cos\alpha\cos\frac{\varDelta}{2} + 2R'\sin\alpha\sin\frac{\varDelta}{2}\right]^2\right\}, \quad (2)$$

und setzt man dazu, da man doch von einer beliebigen Einheit ausgehen kann, $C+R=1$, R' mit einem andern Zeichen $=k$ und folglich wegen der obigen Relation $R=k^2$, $C=1-k^2$, wodurch zugleich die Formeln an Uebersichtlichkeit gewinnen, weil k in der Axe $=1$ und mit wachsendem Winkel φ schnell kleiner wird, so erhält man

$$I = \frac{A^2}{(1+k^2)^2}\left\{(1-k^2)^2\cos^2(\alpha+2f)\sin\frac{\varDelta}{2} + \left[(1+k^2)\cos\alpha\cos\frac{\varDelta}{2} + 2k\sin\alpha\sin\frac{\varDelta}{2}\right]^2\right\}, \quad (3)$$

welches genau die Gleichung ist, die Airy nach seiner Hypothese von den beiden elliptischen Wellen gegeben hat. In dem Folgenden werde ich die Berechnung der gröfsern Leichtigkeit wegen überall nach den Elementarwellen führen, und zunächst nur die Relation $R'^2 = R(C+R)$ aufnehmen, zum Schlufs aber $C=1-k^2$, $R'=k$, $R=k^2$ setzen, um mich den schon bekannten Formeln Airys anzuschliefsen. —

Zur Erläuterung der Gleichung (3) sei erstens $\alpha = 90^0$, dann geht sie über in

$$I = \frac{A^2}{(1+k^2)^2}\left\{(1-k^2)^2\sin^2 2f + 4k^2\right\}\sin^2\frac{\varDelta}{2}. \quad (4)$$

Wegen des Factors $\sin^2\frac{\varDelta}{2}$ entstehen concentrische Ringe um die Axe als Mittelpunct, ihre Maxima liegen bei $\sin^2\frac{\varDelta}{2} = 1$ und ihre Minima bei $\sin^2\frac{\varDelta}{2} = 0$. Das Centrum selbst, wo $k=1$ ist, besitzt eine Intensität $= A^2\sin^2\frac{\varDelta}{2} = A^2\sin^2\frac{\pi\delta'}{\lambda}$ und ist allein von der Verzögerung δ' des links

circularen gegen den rechts circularen Strahl abhängig. Je weiter sich die Ringe vom Centrum entfernen oder je kleiner k wird, um desto mehr tritt der Einfluſs des Gliedes $(1-k^2)^2 \sin^2 2f$ auf den Werth der Intensität in den Maximis hervor und macht ihn am schwächsten bei $\sin 2f = 0$, d. i. bei $f = 0^\circ = 90^\circ = 180^\circ = 270^\circ$; daher wird man in einiger Entfernung vom Centrum ein rechtwinkliges, dunkles, nach den Seiten verwaschenes Kreuz bemerken, das aber die Ringe nicht ganz unterbricht, weil das andere Glied $4k^2$ die Maxima nicht ganz auf 0 oder auf die Intensität der Minima herabsinken läſst.

Wenn zweitens $\alpha = 0^\circ$ ist, so wird aus (3)

$$I = \frac{A^2}{(1+k^2)^2}\left\{(1+k^2)^2 - [(1-k^2)^2 \sin^2 2f + 4k^2] \sin^2 \frac{\Delta}{2}\right\}, \quad (5)$$

und die Erscheinung verhält sich zur vorigen complementär.

Giebt man drittens α einen beliebigen Werth, so darf man wohl annehmen, daſs sich mit einer kleinen Aenderung in Δ noch ein constanter Werth von λ verbinden lasse. Setzt man daher das Differenzial der Gleichung (3) nach $\Delta = 0$, so findet man die Lage der Maxima oder Minima aus

$$(1-k^2)^2 \cos^2(\alpha+2f) \sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2}$$

$$\left[(1+k^2)\cos\alpha\cos\frac{\Delta}{2} + 2k\sin\alpha\sin\frac{\Delta}{2}\right]\left[2k\sin\alpha\cos\frac{\Delta}{2} - (1+k^2)\cos\alpha\sin\frac{\Delta}{2}\right] = 0,$$

oder aus

$$\tang\frac{\Delta}{2} = \frac{2k(1+k^2)\sin\alpha\cos\alpha}{(1+k^2)^2\cos^2\alpha - 4k^2\sin^2\alpha + 2k(1+k^2)\sin\alpha\cos\alpha\tang\frac{\Delta}{2} - (1-k^2)\cos^2(\alpha+f)}. \quad (6)$$

Hiernach ändert sich der Werth von $\frac{\Delta}{2}$ im Allgemeinen mit dem Uebergange von $\cos^2(\alpha+2f)$ aus 0 in 1, und somit müssen die vorher concentrischen Ringe jetzt mehr viereckig erscheinen. Da das Centrum selbst bei $k=1$ in dem Falle dunkel wird, wenn $\cos\left(\alpha - \frac{\Delta}{2}\right) = 0$ ist, so bleibt unter dieser Bedingung auch bei abnehmenden k die Intensität noch ziemlich nahe $=0$, sobald auch $\cos^2(\alpha+2f) = 0$ ist; folglich kommt in der Mitte ein kleines dunkles Kreuz zum Vorschein, dessen Spitzen nach $f = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 135^\circ - \frac{\alpha}{2} = \ldots$ gerichtet sind. —

Wendet man endlich eine links drehende, übrigens gleich dicke Quarzplatte an, so hat man in den obigen Formeln R' oder k negativ zu setzen, und die Intensität folgt aus

$$I = \frac{A^2}{(1+k^2)^2}\left\{(1-k^2)^2\cos^2(\alpha+2f)\sin^2\frac{\Delta}{2} + \left[(1+k^2)\cos\alpha\cos\frac{\Delta}{2} - 2k\sin\alpha\sin\frac{\Delta}{2}\right]^2\right\}. \quad (7)$$

Wenn man hierin α und f negativ nimmt, so verwandelt sie sich wieder in die vorher erläuterte Hauptgleichung (3); demnach bleiben alle Erscheinungen dieselben, sofern man den untern polarisirenden Spiegel links herum dreht und die Erscheinung nach derselben Richtung herum betrachtet.

3. Farbenringe um die Axe einer Quarzplatte, wenn das Licht auf der einen Seite linear, auf der andern circular polarisirt wird.

Wir wollen annehmen, dafs das nach PT_1 (Fig. 53.) polarisirt einfallende Licht von einer Intensität $= A^2$ vorher durch das Fresnelsche Parallelopiped $R_1 Pr_1$ rechts circular polarisirt werde, dann durch die rechts drehende Quarzplatte dringe und nun von neuem nach der Polarisationsrichtung PT_2 gebracht werde. Bleiben alle frühern Bezeichnungen, so spaltet sich das einfallende Licht zuerst in die zwei Wellen $A\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin x$ und $A\sqrt{\tfrac{1}{2}}\sin(x-90^0)$ nach PR_1 und Pr_1; die erstere Welle erzeugt darauf mit Uebergehung des Factors $\dfrac{A}{\sqrt{2\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}}$ nach dem Austritt aus der Crystallplatte folgende Schwingungen:

nach $PO: \xi_o = C\cos(\alpha+f+45^0)\sin x$, nach $PE: \xi_e = -C\sin(\alpha+f+45^0)\sin(x-\varDelta)$,
nach $PR_1: \xi_r = R\sin x$ und $\xi_l = R\sin(x-\varDelta)$,
nach $Pr_1: \xi'_r = R'\sin(x-90^0)$ und $\xi'_l = -R'\sin(x-90^0-\varDelta)$,

und die andere

nach $PO: \xi_o = C\sin(\alpha+f+45^0)\sin(x-90^0)$, nach $PE: \xi_e = C\cos(\alpha+f+45^0)\sin(x-90^0-\varDelta)$,
nach $Pr_1: \xi_r = R\sin(x-90^0)$, und $\xi_l = R\sin(x-90^0-\varDelta)$,
nach $PR_1: \xi'_r = -R'\sin(x-90^0-90^0)$ und $\xi'_l = R'\sin(x-90^0-90^0-\varDelta)$;

daraus entstehen überhaupt die Schwingungen

nach $PO: \xi_o = C\sin(x-\alpha-45^0-f)$,
nach $PE: \xi_e = -C\sin(x-\alpha-45^0-f+90^0-\varDelta)$,
nach $PR_1: \xi_r = (R+R')\sin x$ und $\xi_l = (R-R')\sin(x-\varDelta)$,
nach $Pr_1: \xi'_r = (R+R')\sin(x-90^0)$ und $\xi'_l = (R-R')\sin(x-90^0-\varDelta)$.

Bringt man diese Schwingungen nach PT_2, indem man die erste mit $\cos f$, die andere mit $-\sin f$, die dritten mit $\cos(\alpha+45^0)$ und die vierten mit $\sin(\alpha+45^0)$ multiplicirt, so erhält man

$$\xi = C\cos f\sin(x-\alpha-45^0-f) + C\sin f\sin(x-\alpha-45^0-f+90^0-\varDelta)$$
$$+(R+R')\sin(x-\alpha-45^0)+(R-R')\sin(x-\alpha-45^0-\varDelta),$$

und daraus mit Hinzufügung des übergangenen Factors die resultirende Intensität

$$I = \frac{A^2}{2\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}[-C\cos f\sin f + C\sin f\cos(f+\varDelta) - (R-R')\sin\varDelta]^2$$
$$+\frac{A^2}{2\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}[C\cos^2 f + C\sin f\sin(f+\varDelta)+(R+R')+(R-R')\cos\varDelta]^2,$$

oder nach den gehörigen Reductionen und mit Berücksichtigung der oben angegebenen Relation zwischen C, R, R',

$$I = \frac{A^2}{2(C+2R)^2}[(C+2R)^2+2CR'\cos 2f - 2CR'\cos 2f\cos\varDelta + C(C+2R)\sin 2f\sin\varDelta],$$

oder endlich, wenn man $C = 1-k^2$, $R' = k$, $R = k^2$ setzt,

$$I = \frac{A^2}{2(1+k^2)^2}[(1+k^2)^2+2k(1-k^2)\cos 2f - 2k(1-k^2)\cos 2f\cos\varDelta+(1-k^4)\sin 2f\sin\varDelta].$$

Man nehme noch

$$\frac{1+k^2}{2k}\operatorname{tang}2f = \operatorname{tang}\chi,$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$I = \frac{A^2}{2(1+k^2)^2}\left[(1+k^2)^2+2k(1-k^2)\cos 2f-(1-k^4)\sqrt{\left(\frac{4k^2}{(1+k^2)^2}\cos^2 2f+\sin^2 2f\right)}\cos(\Delta-\chi)\right]. \quad (8)$$

Nach dieser Formel bekommt zunächst das Centrum, wo $k=1$ ist, eine gleichmäfsige Intensität $= \frac{A^2}{2}$. Die Ringe, deren Existenz durch den Factor $1-k^4$ bedingt wird, erscheinen erst in einiger Entfernung vom Centrum, und haben ihre Minima bei $\cos(\Delta+\chi)=1$, ihre Maxima bei $\cos(\Delta+\chi)=-1$. Da aber $\Delta = \frac{2\pi\delta'}{\lambda}+\frac{2\pi\delta}{\lambda}$ ist, und δ' den Werth $\frac{dT}{\lambda}$, δ den Werth $\frac{\frac{1}{2}(\mu^2-\pi^2)T\varphi^2}{\mu}$ hat, so bestimmt man die Radien φ der Minima aus

$$\varphi^2 = \frac{2\mu}{\mu^2-\pi^2}\left[\frac{0^0-\chi}{360^0}.\frac{\lambda}{T}-\frac{d}{\lambda}\right] = \frac{2\mu}{\mu^2-\pi^2}\left[\frac{360^0-\chi}{360^0}.\frac{\lambda}{T}-\frac{d}{\lambda}\right] = \ldots.$$

So lange hier für φ^2 ein negativer Werth entsteht, ist φ unmöglich; nimmt man daher, um am ersten positive Resultate zu erhalten, χ negativ, so gelangt man, indem χ nach der Gleichung $\operatorname{tang}\chi = \frac{1+k^2}{2k}\operatorname{tang}2f$ unausgesetzt, anfänglich sogar ziemlich nahe proportional mit $2f$ wächst, mit jeder Zunahme in f von -180^0 vom ersten aufs zweite, vom zweiten aufs dritte Minimum u. s. w., und erkennt daraus, dafs die Minima überhaupt eine ununterbrochene links herumgehende Spirale bilden, die bei $f=45^0=135^0=\ldots$ schneller hervorspringt und dadurch ein etwas viereckiges Ansehen gewinnt. Doch da man ebenso gut mit $f=0^0$ als mit $f=180^0$ beginnen kann, so ist die Spirallinie doppelt und entsteht an zwei sich diametral entgegengesetzten Stellen. Die Maxima folgen einem gleichen Gesetze, wie man sich leicht überzeugen wird.

Wenn das Fresnelsche Parallelopiped links circular polarisirt, so ändert f in (8) sein Zeichen, es bleiben daher dieselben Spiralen, nur gehen sie rechts herum. Bei einer links drehenden Quarzplatte wird k negativ; deshalb entstehen bei rechts circularer Polarisation rechts gewundene, bei links circularer links gewundene Spiralen.

4. Farbenringe um die Axe einer Quarzplatte, wenn das Licht auf beiden Seiten circular polarisirt wird.

Die Quarzplatte sei eine rechts drehende und man wende auf beiden Seiten rechts circulares Licht an; dann finden nach dem Durchgange durch die Platte wie in der vorigen Nummer folgende Gleichungen statt, in denen der Factor $\frac{A}{\sqrt{2\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}}$ übergangen ist,

nach PO : $\xi_o = C\sin(x-\alpha-45^0-f)$,
nach PE : $\xi_e = -C\sin(x-\alpha-45^0-f+90^0-\Delta)$,
nach PR_1 : $\xi_r = (R+R')\sin x$ und $\xi_l = (R-R')\sin(x-\Delta)$,
nach Pr_1 : $\xi'_r = (R+R')\sin(x-90^0)$ und $\xi'_l = (R-R')\sin(x-90^0-\Delta)$.

Man bringe sie wegen des zweiten Fresnelschen Parallelopipeds $R_2 Pr_2$ (Fig. 53.) nach PR_2 und Pr_2, so entstehen die Schwingungsgleichungen ξ_2 und ξ'_2, nämlich

nach $PR_2 : \xi_2 = C\cos(f+45^\circ)\sin(x-\alpha-45^\circ-f) + C\sin(f+45^\circ)\sin(x-\alpha-45^\circ-f+90^\circ-\Delta)$
$$+(R+R')\sin(x-\alpha)+(R-R')\sin(x-\alpha-\Delta),$$

und nach

$$Pr_2 : \xi'_2 = C\sin(f+45^\circ)\sin(x-\alpha-45^\circ-f-90^\circ) - C\cos(f+45^\circ)\sin(x-\alpha-45^\circ-f-\Delta)$$
$$-(R+R')\sin(x-\alpha)-(R-R')\sin(x-\alpha-\Delta);$$

daraus ergiebt sich mit Uebergehung des Factor $\frac{A}{2\sqrt{\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}}$ die gemeinsame Schwingung nach PT_2

$$\xi = C\sin(x-\alpha-2f-90^\circ) - C\sin(x-\alpha-2f-90^\circ-\Delta)$$

und die resultirende Intensität

$$I = \frac{A^2 C^2}{4\{(C+R)^2+2R'^2+R^2\}}\,[\sin^2\Delta + (1-\cos\Delta)^2],$$

oder

$$I = \frac{A^2 C^2}{(C+2R)^2}\sin^2\frac{\Delta}{2} = \frac{A^2(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2}\sin^2\frac{\Delta}{2}. \quad (9)$$

Das Centrum ist dunkel, weiterhin entstehen concentrische Ringe. Eine links drehende Quarzplatte ändert das Resultat nicht; hat man aber auf der einen Seite eine links circulare Polarisation angewandt, so wird

$$I = \frac{A^2(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2}\cos^2\frac{\Delta}{2}, \quad (10)$$

und die Maxima und Minima wechseln gegen vorhin ihre Stellen.

5. Farbenringe durch zwei gleich dicke, aber entgegengesetzt drehende Quarzplatten.

Wir legen endlich zwei gleich dicke, eine rechts und eine links drehende Quarzplatte auf einander, lassen nach PT_1 (Fig. 53.) polarisirtes Licht auffallen und untersuchen es hinterher durch den nach PT_2 gerichteten polarisirenden Spiegel. Nach dem Durchgange durch die obere rechts drehende Platte entstehen nach No. 2. mit Uebergehung des Factors $\frac{A}{\sqrt{\{(C+R)^2+2R'^2 R^2\}}}$ die Schwingungsgleichungen

1) nach $PO : \xi_o = C\cos(\alpha+f)\sin x,$
2) nach $PE : \xi_e = -C\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta),$
3) nach $PT_1 : \xi_r + \xi_l = R\sin x + R\sin(x-\Delta),$
4) nach $Pt : \xi'_r + \xi'_l = R'\sin(x-90^\circ) - R'\sin(x-90^\circ-\Delta).$

Nach dem Durchgange durch die zweite links drehende Platte entspringen aus jeder drei oder vier neue Schwingungen, nämlich mit Uebergehung des gemeinsamen Factors $\frac{A}{(C+R^2)+2R'^2+R^2}$ aus der 1sten

nach PO als $\xi_o = C^2 \cos(\alpha+f)\sin x$,

- PO als $\xi_r + \xi_l = CR\cos(\alpha+f)\sin(x-\Delta) + CR\cos(\alpha+f)\sin x$,

- PE als $\xi'_r + \xi'_l = CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta) - CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$,

aus der 2ten

nach PE als $\xi_e = -C^2\sin(\alpha+f)\sin(x-2\Delta)$,

- PE als $\xi'_r + \xi'_l = -CR\sin(\alpha+f)\sin(x-2\Delta) - CR\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta)$,

- PO als $\xi'_r + \xi'_l = CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-2\Delta) - CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta)$,

aus der 3ten

nach PO als $\xi_o = CR\cos(\alpha+f)\sin x + CR\cos(\alpha+f)\sin(x-\Delta)$,

- PE als $\xi_e = -CR\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta) - CR\sin(\alpha+f)\sin(x-2\Delta)$,

- PT_1 als $\xi_r + \xi_l = R^2\sin(x-\Delta) + R^2\sin(x-2\Delta) + R^2\sin x + R^2\sin(x-\Delta)$,

- Pt als $\xi'_r + \xi'_l = RR'\sin(x-90^\circ-\Delta) + RR'\sin(x-90^\circ-2\Delta)$
$- RR'\sin(x-90^\circ) - RR'\sin(x-90^\circ-\Delta)$,

aus der 4ten

nach PO als $\xi_o = CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ) - CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta)$,

- PE als $\xi_e = CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta) - CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-2\Delta)$,

- Pt als $\xi_r + \xi_l = RR'\sin(x-90^\circ-\Delta) - RR'\sin(x-90^\circ-2\Delta)$
$+ RR'\sin(x-90^\circ) - RR'\sin(x-90^\circ-\Delta)$,

- PT_1 als $\xi'_r + \xi'_l = R'^2\sin(x-\Delta) - R'^2\sin(x-2\Delta) - R'^2\sin x + R'^2\sin(x-\Delta)$.

Nimmt man diese Schwingungen zusammen, so erhält man überhaupt

nach $PO: \xi_o = C^2\cos(\alpha+f)\sin x + 2CR\cos(\alpha+f)\sin x + CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$
$+ 2CR\cos(\alpha+f)\sin(x-\Delta) - 2CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta)$
$+ CR'\sin(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-2\Delta)$,

nach $PE: \xi_e = -C^2\sin(\alpha+f)\sin(x-2\Delta) - 2CR\sin(\alpha+f)\sin(x-2\Delta)$
$- CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-2\Delta) - 2CR\sin(\alpha+f)\sin(x-\Delta)$
$+ 2CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ-\Delta) - CR'\cos(\alpha+f)\sin(x-90^\circ)$,

und nach $PT_1: \xi_t = 2(R^2+R'^2)\sin(x-\Delta) + (R^2-R'^2)\sin(x-2\Delta) + (R^2-R'^2)\sin x$.

Aus diesen Schwingungen entsteht die gemeinsame nach PT_2

$$\xi = C(C+2R)\cos f\cos(\alpha+f)\sin x + CR'\sin(\alpha+2f)\sin(x-90^\circ)$$
$$+2CR\cos\alpha\sin(x-\Delta) - 2CR'\sin(\alpha+2f)\sin(x-90^\circ-\Delta) + CR'\sin(\alpha+2f)\sin(x-90^\circ-2\Delta)$$
$$+ C(C+2R)\sin f\sin(\alpha+f)\sin(x-2\Delta) + 2(R^2+R'^2)\cos\alpha\sin(x-\Delta)$$
$$+ (R^2-R'^2)\cos\alpha\sin(x-2\Delta) + (R^2-R'^2)\cos\alpha\sin x,$$

oder mit Berücksichtigung der Relation $R'^2 = R(C+R)$

$$\xi = -2C(C+2R)\cos(\alpha+2f)\sin\frac{\Delta}{2}\cos\frac{\Delta}{2}\sin(x-90^\circ-\Delta)$$

$$-4CR'\sin(\alpha+2f)\sin^2\frac{\Delta}{2}\sin(x-90^\circ-\Delta) + C^2\cos\alpha\cos\Delta\sin(x-\Delta) + 4R'^2\cos\alpha\sin(x-\Delta).$$

Nur die Erscheinung ist interessant, wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, dann wird mit Hinzufügung des Factors $\frac{A}{(C+2R)^2}$ die resultirende Intensität

$$I = \frac{A^2 C^2}{(C+2R)^2} \sin^2 \frac{\varDelta}{2} \left[\frac{4R'}{C+2R} \cos 2f \sin \frac{\varDelta}{2} - 2 \sin 2f \cos \frac{\varDelta}{2}\right]^2,$$

oder

$$I = A^2 \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varDelta}{2} \left[\frac{4k}{1+k^2} \cos 2f \sin \frac{\varDelta}{2} - 2 \sin 2f \cos \frac{\varDelta}{2}\right]^2. \quad (11)$$

Man setze hierin

$$\frac{1+k^2}{2k} \tan 2f = \tan \chi,$$

so geht die Formel über in

$$I = A^2 \frac{(1-k^2)^2}{(1+k^2)^4} [16k^2 \cos^2 2f + 4(1+k^2)^2 \sin^2 2f] \sin^2 \frac{\varDelta}{2} \sin^2 \left(\frac{\varDelta}{2} - \chi\right). \quad (12)$$

Nach dieser Gleichung erscheint das Centrum dunkel, wo $k = 1$ ist.

Aufserdem wird die Intensität $= 0$, 1) wenn $\sin^2 \frac{\varDelta}{2} = 0$ und 2) wenn $\sin^2 \left(\frac{\varDelta}{2} - \chi\right) = 0$ wird; durch die erstere Bedingungsgleichung entstehen concentrische Ringe, durch die andere, wie in der vorigen Nummer, links gewundene Spiralen, die, weil hier

$$\varDelta = 0^\circ - 2\chi = 360^\circ - 2\chi = 720^\circ - 2\chi = \ldots.$$

oder

$$\varDelta \text{ nahe } = 0^\circ - 4f = 360^\circ - 4f = 720^\circ - 4f = \ldots.$$

ist, in vier Quadranten zugleich beginnen und nach jedem Quadranten die dunklen concentrischen Ringe durchschneiden. — Wenn eine links drehende Quarzplatte auf einer rechts drehenden liegt, mufs man k negativ nehmen; dann bleiben dieselben concentrischen Ringe, aber die vierfachen Spiralen gehen rechts herum.

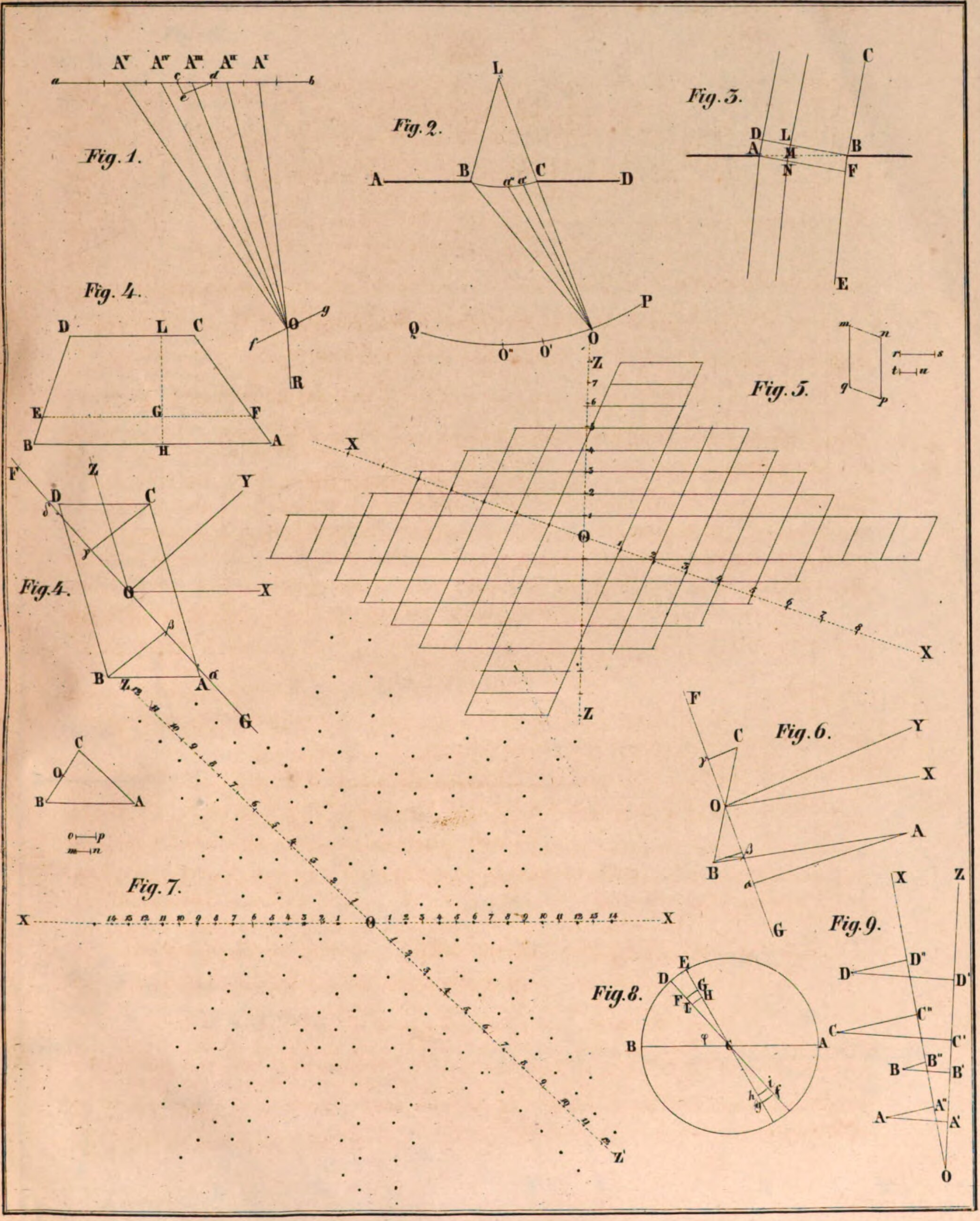


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

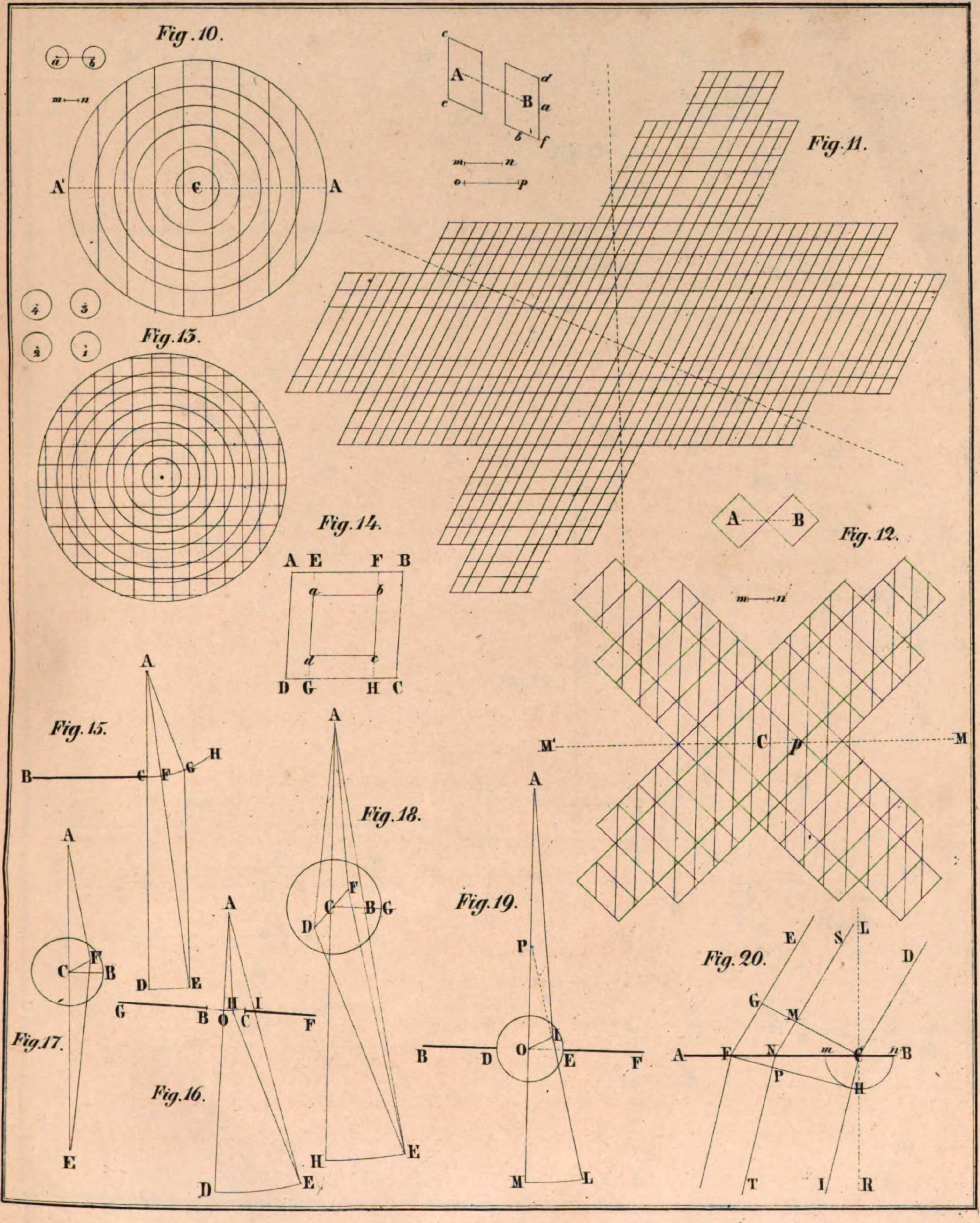


Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

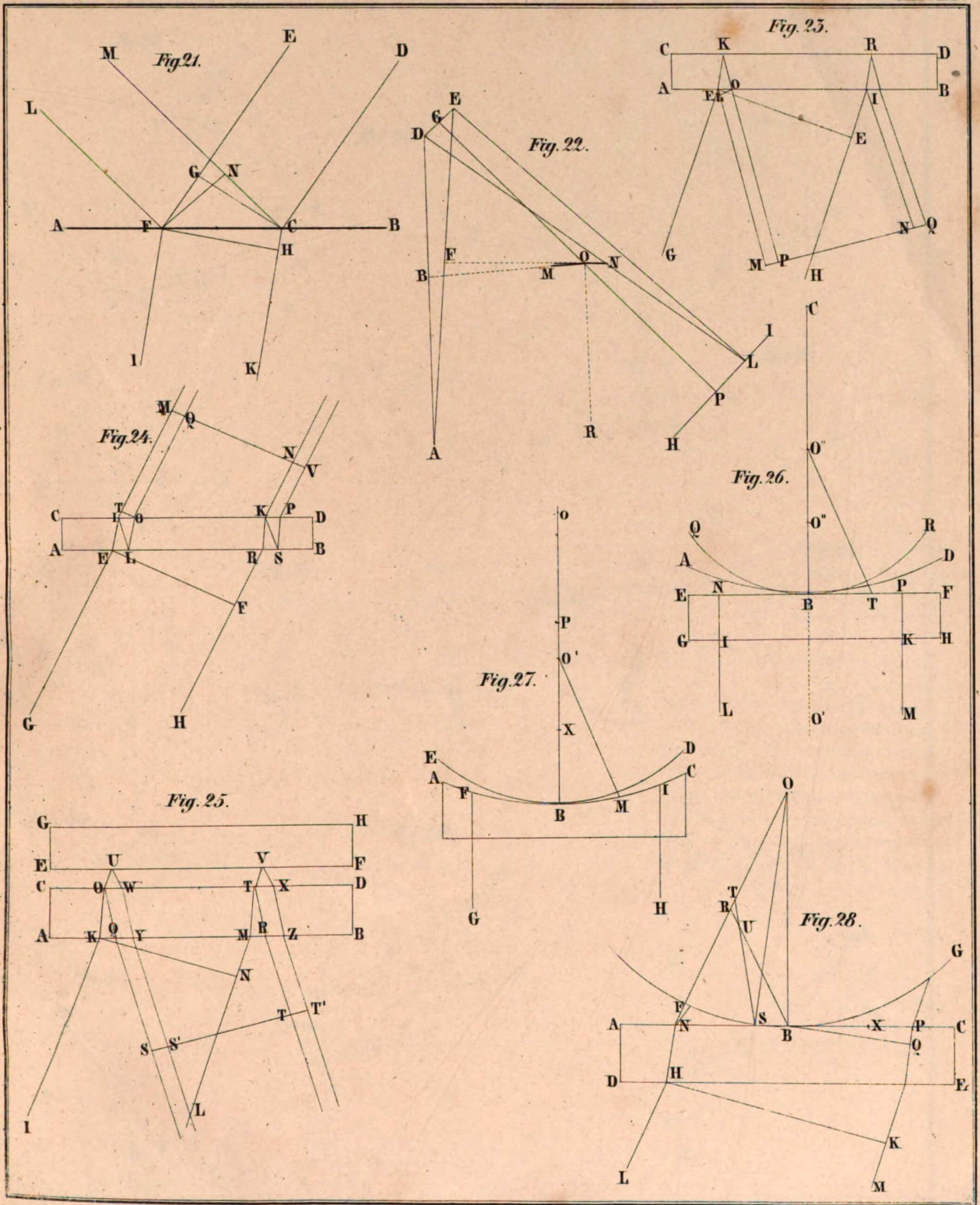


Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

Fig. 29.

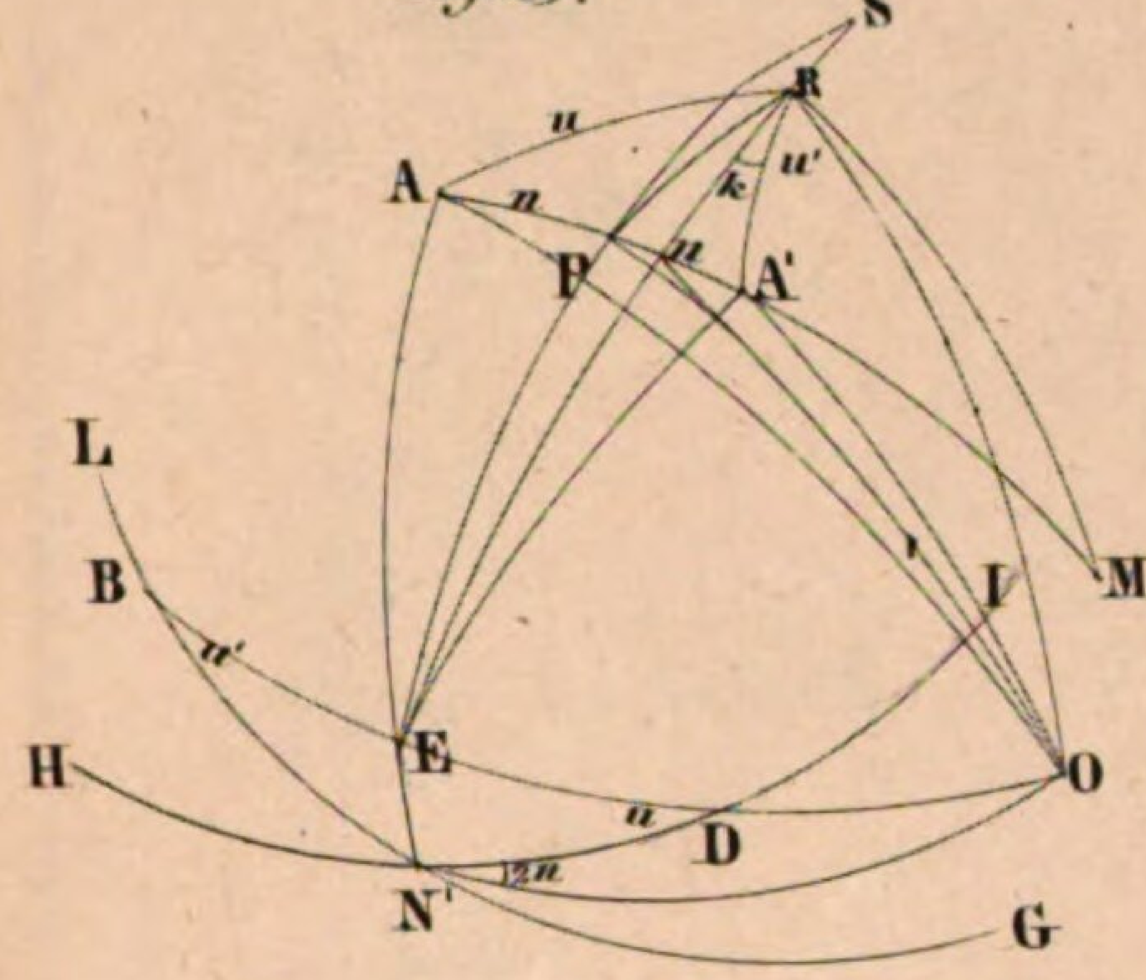


Fig. 30.

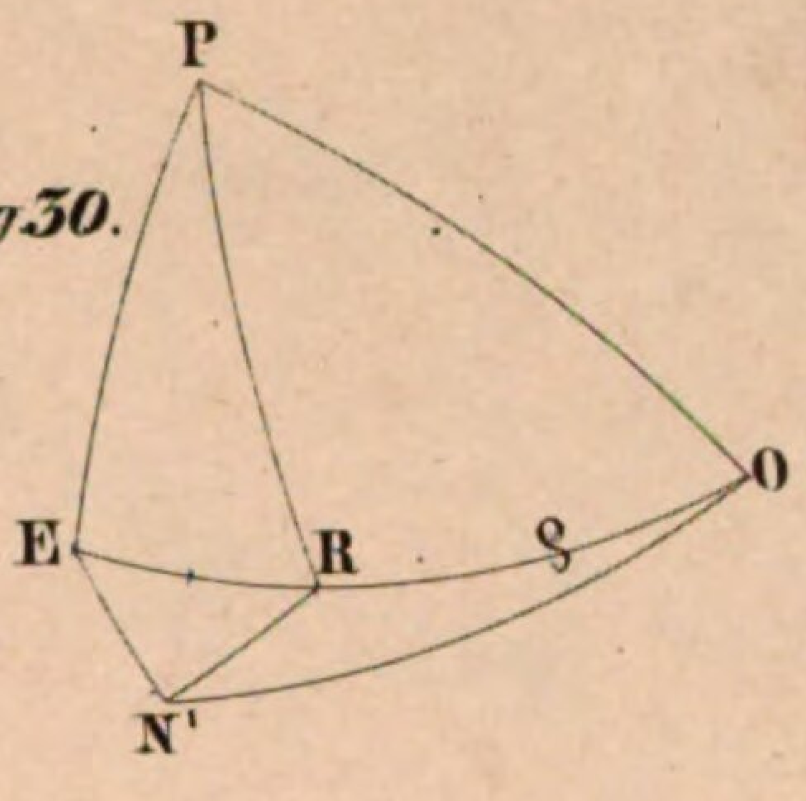


Fig. 31.

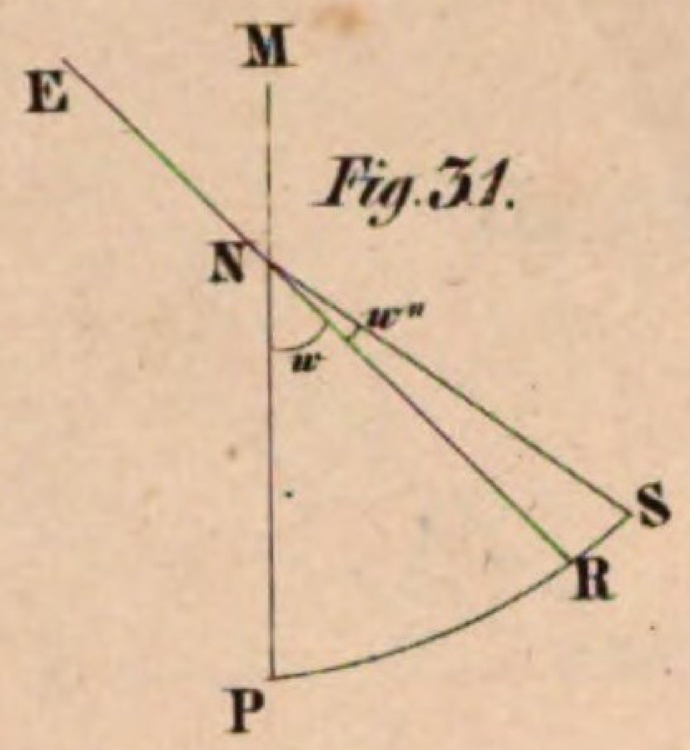


Fig. 32.

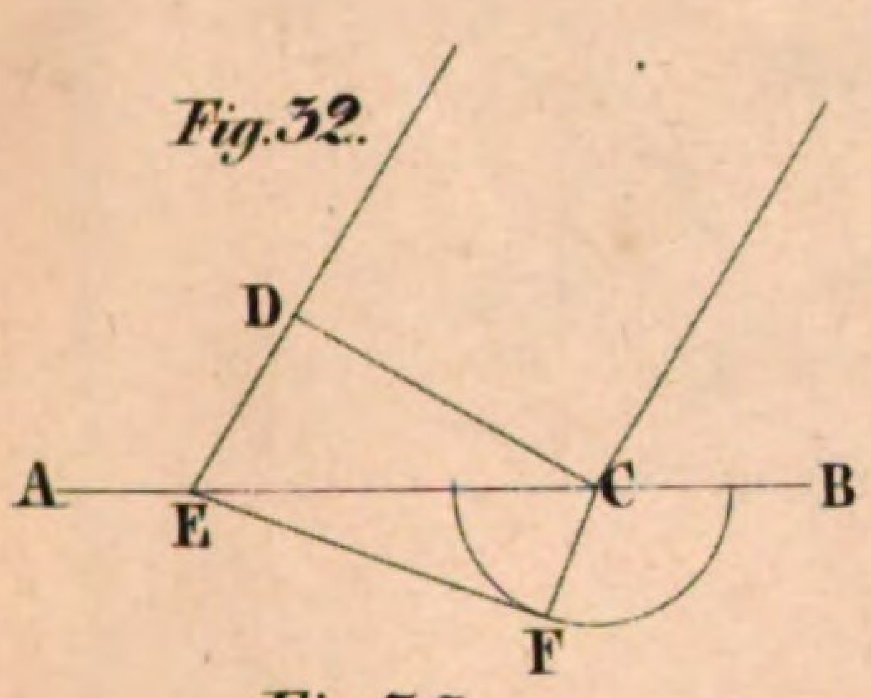


Fig. 33.

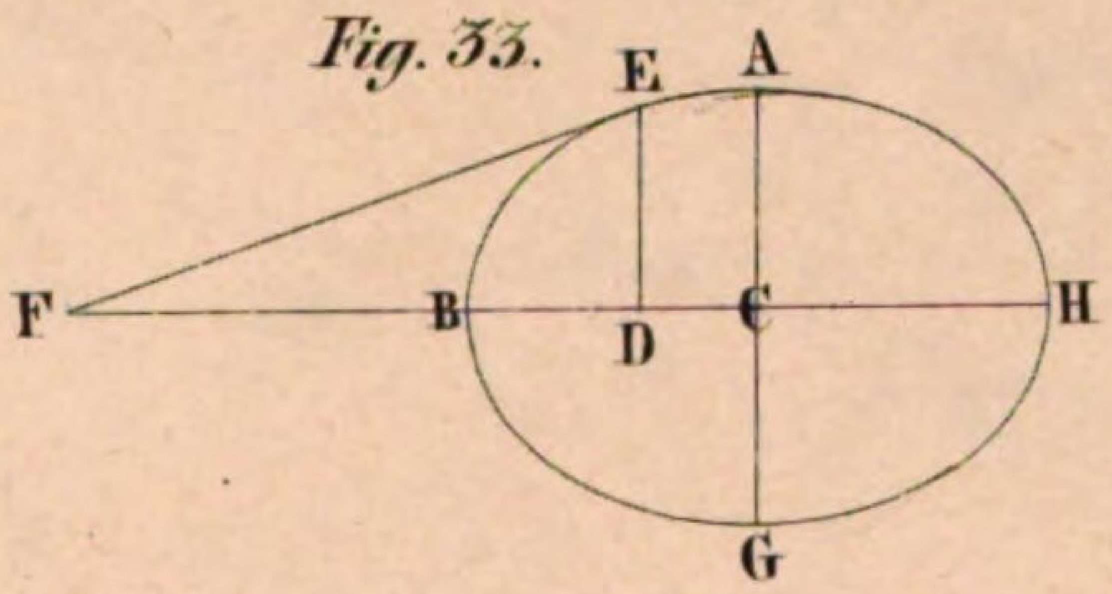


Fig. 34.

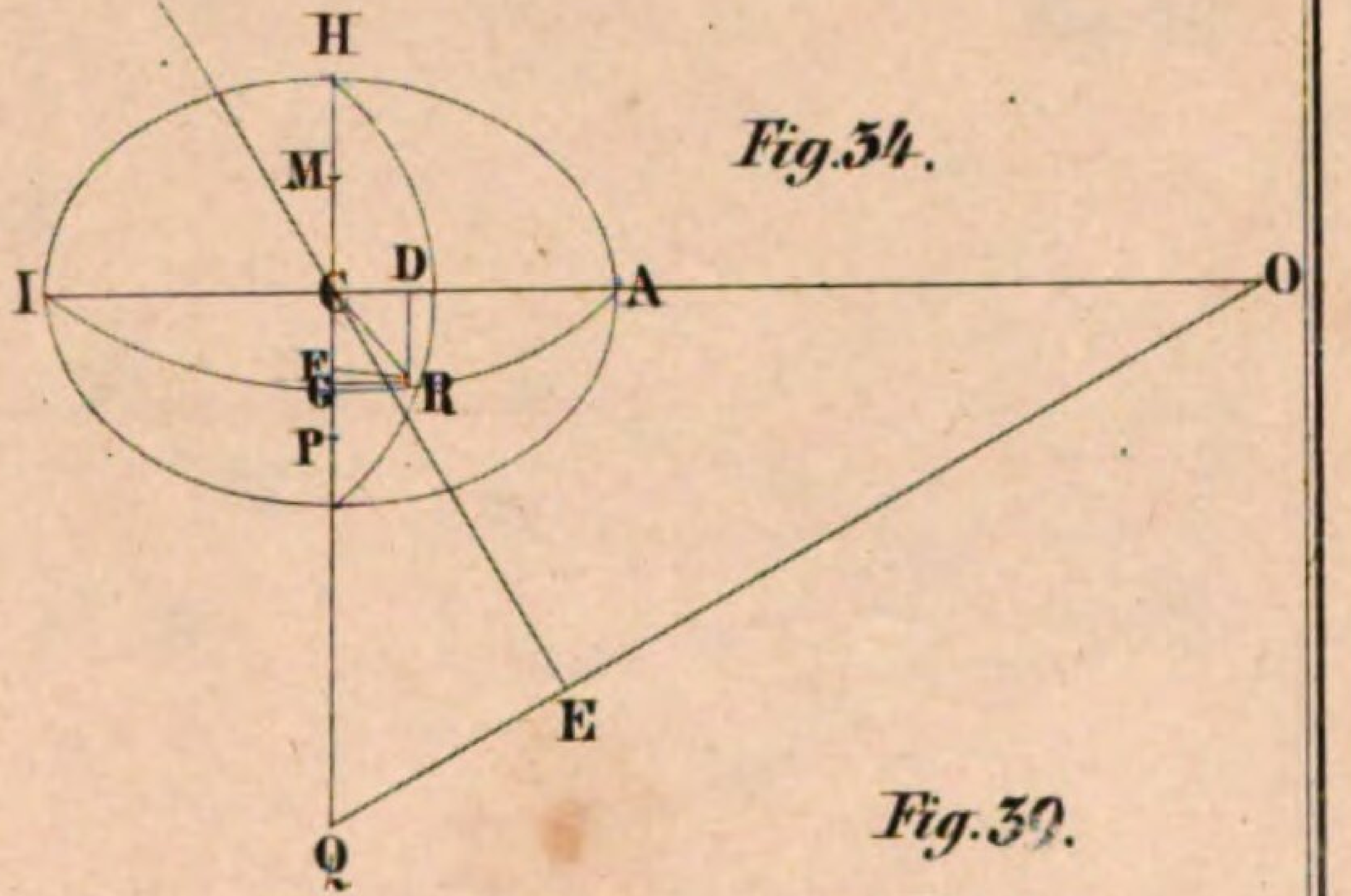


Fig. 35.

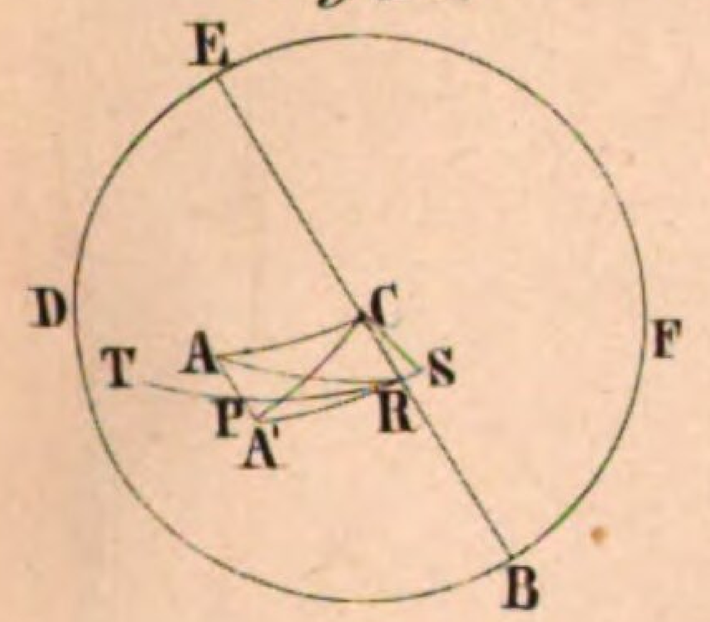


Fig. 36.

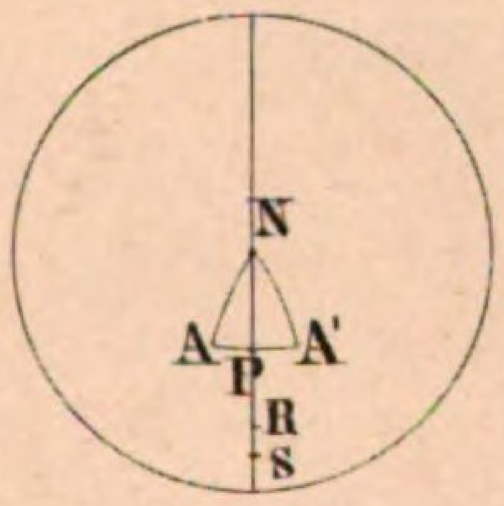


Fig. 37.

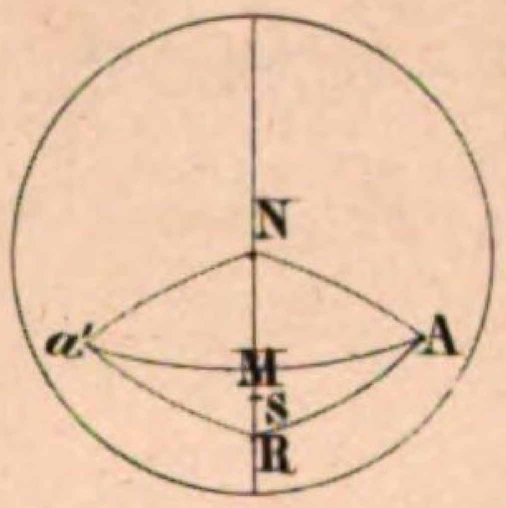


Fig. 38.

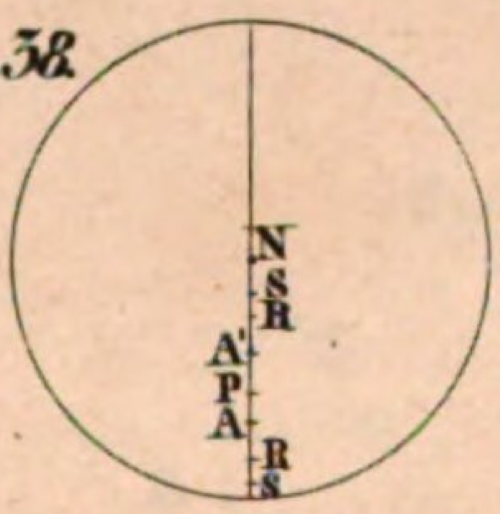


Fig. 39.

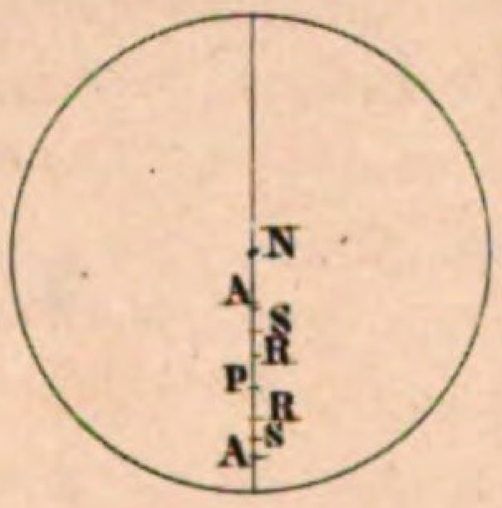


Fig. 40.

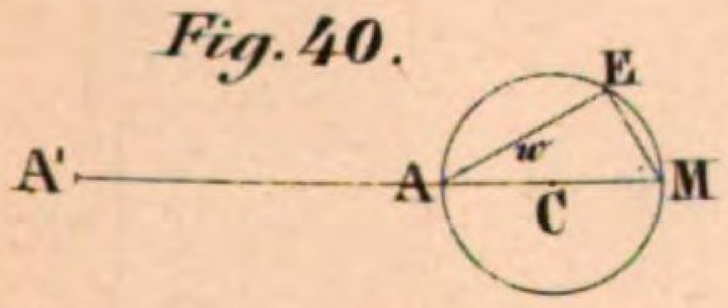


Fig. 41.

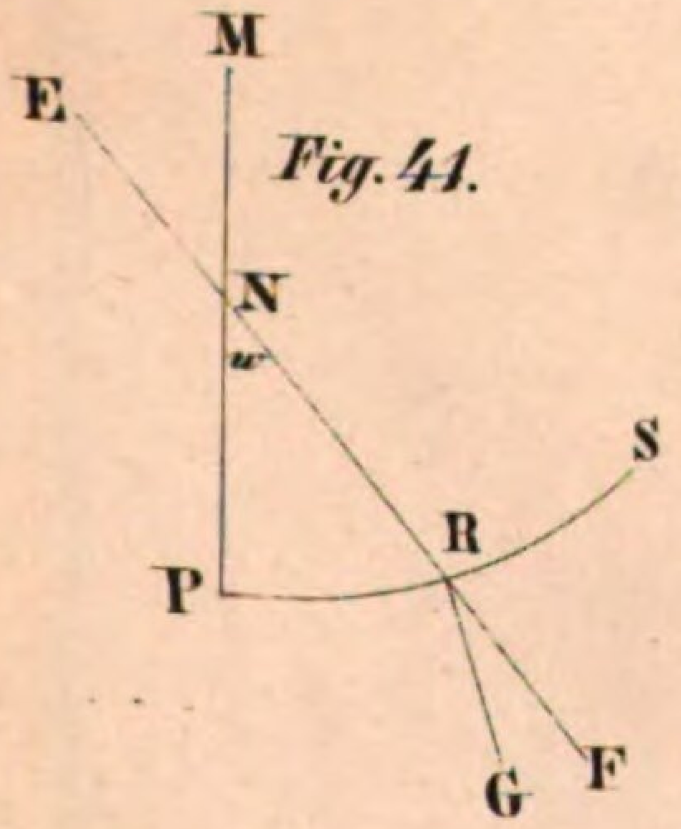


Fig. 42.

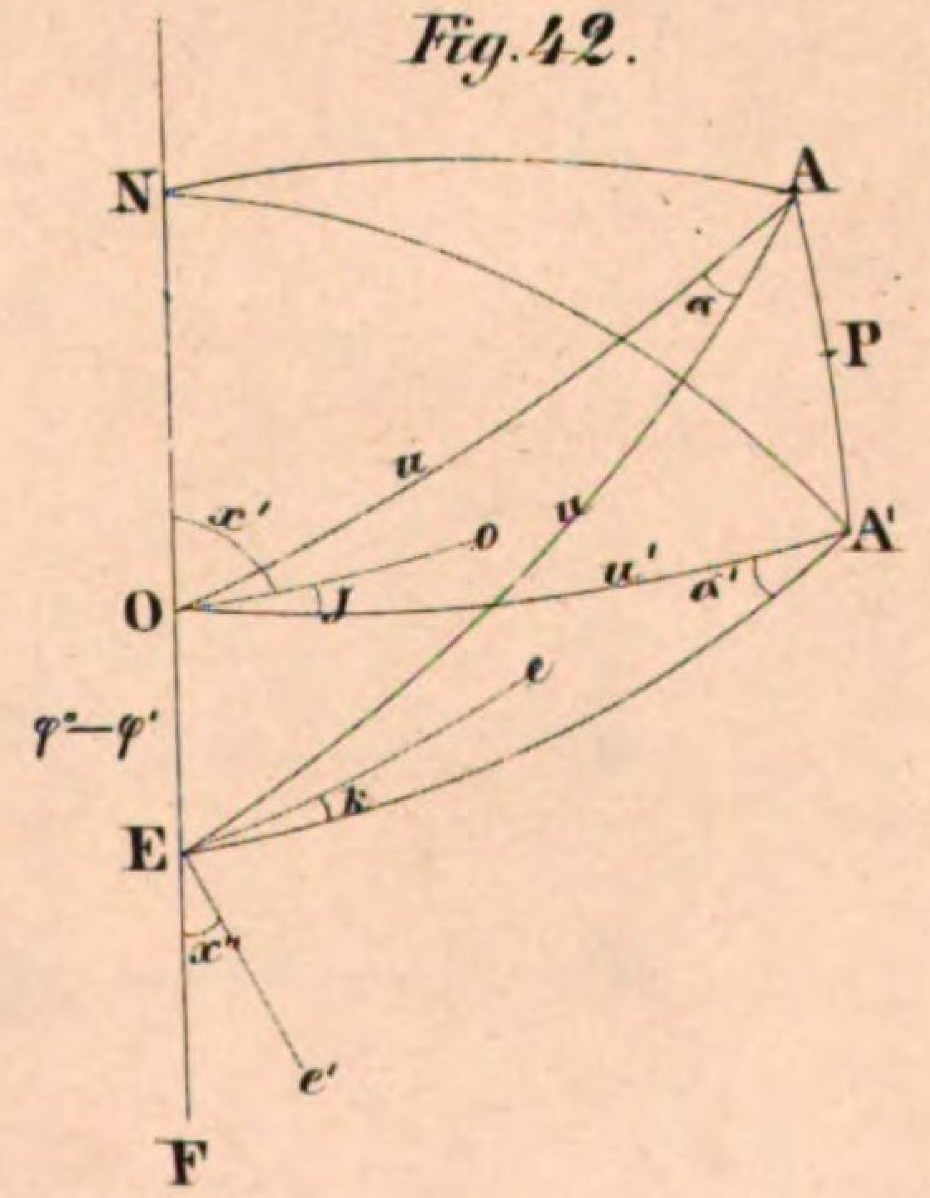


Fig. 43.

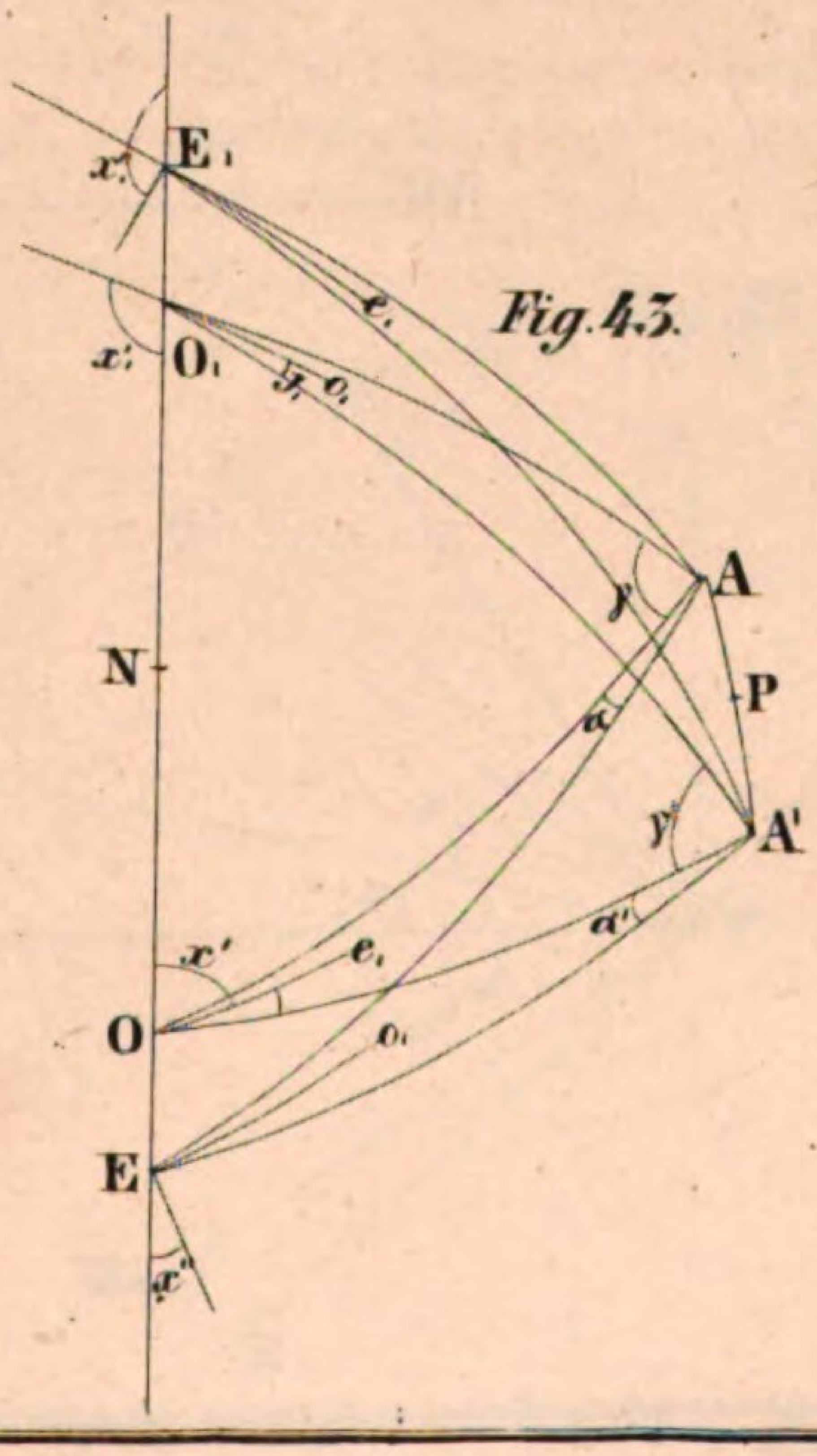


Fig. 44.

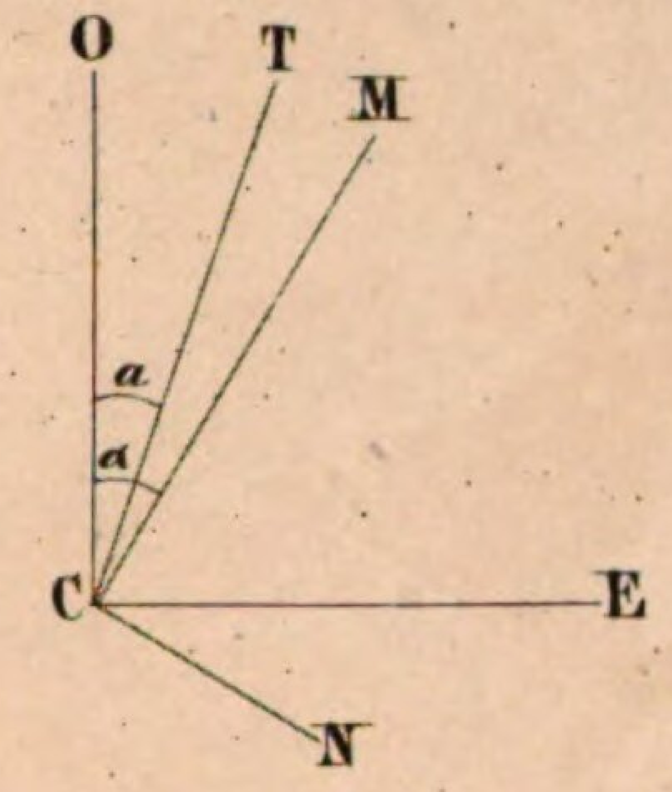


Fig. 45.

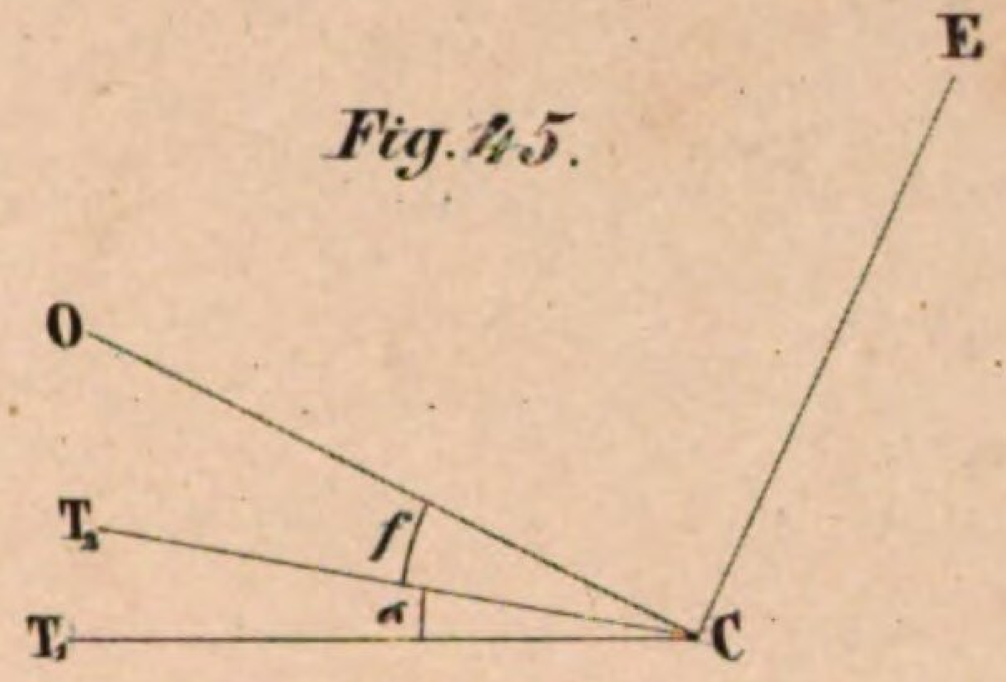


Fig. 46.

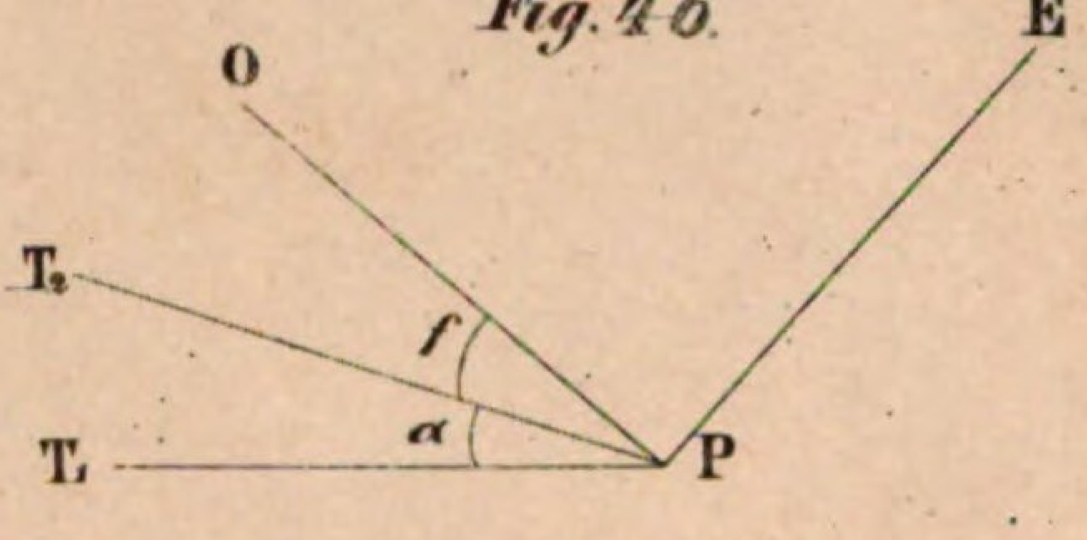


Fig. 47.

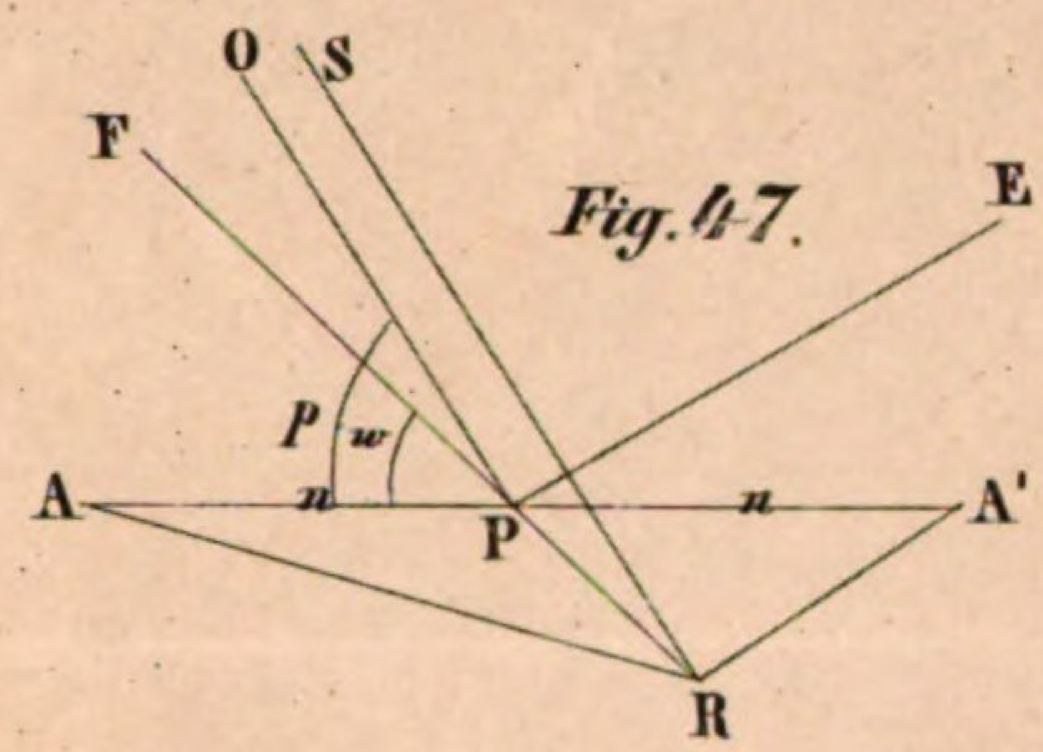


Fig. 48.

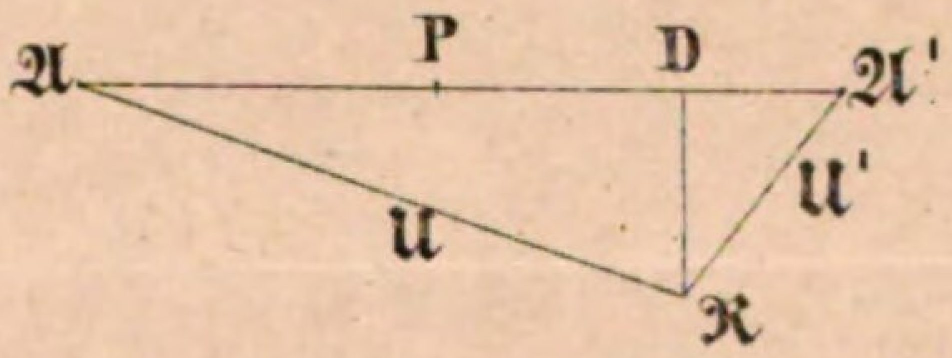


Fig. 49.

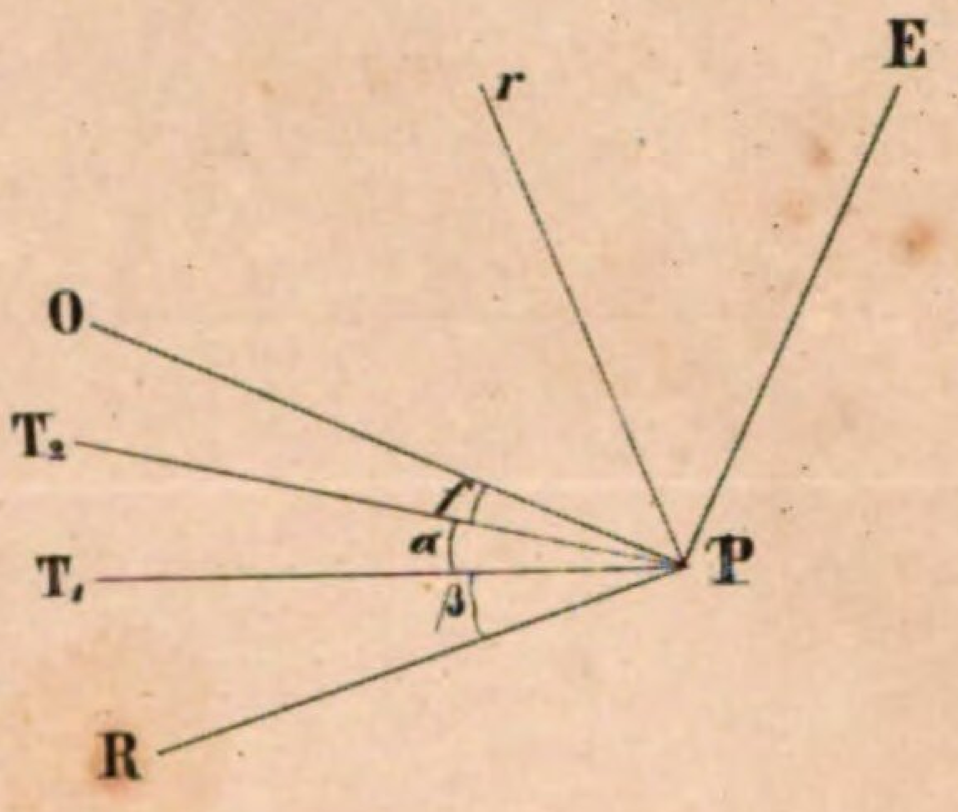


Fig. 50.

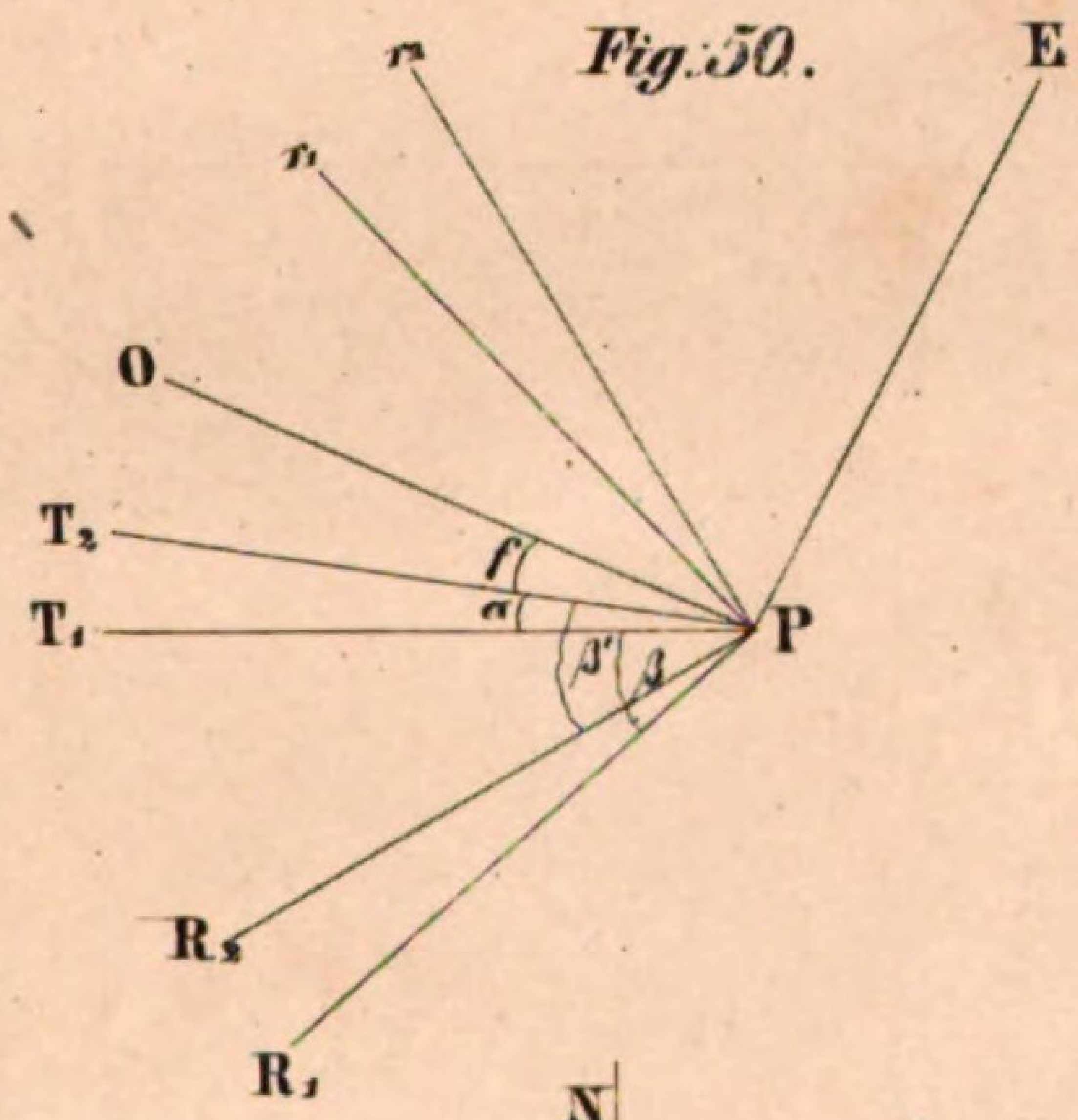


Fig. 51.

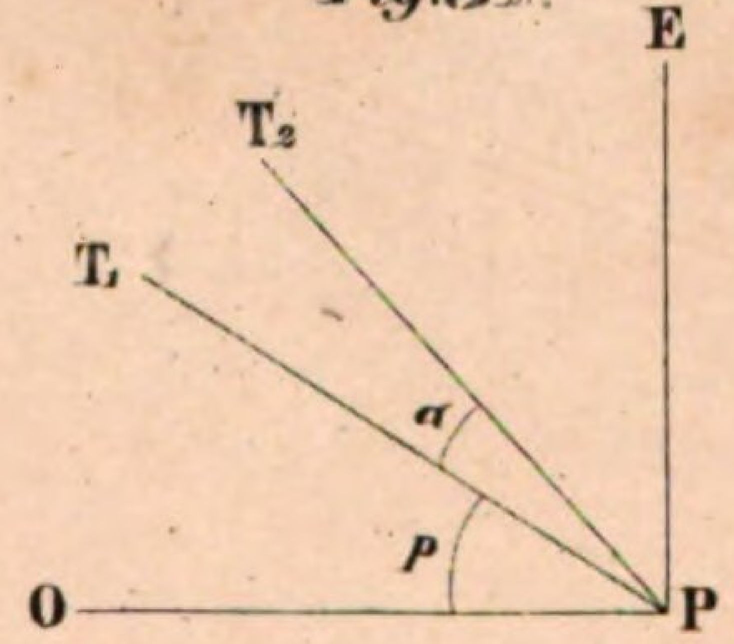


Fig. 52.

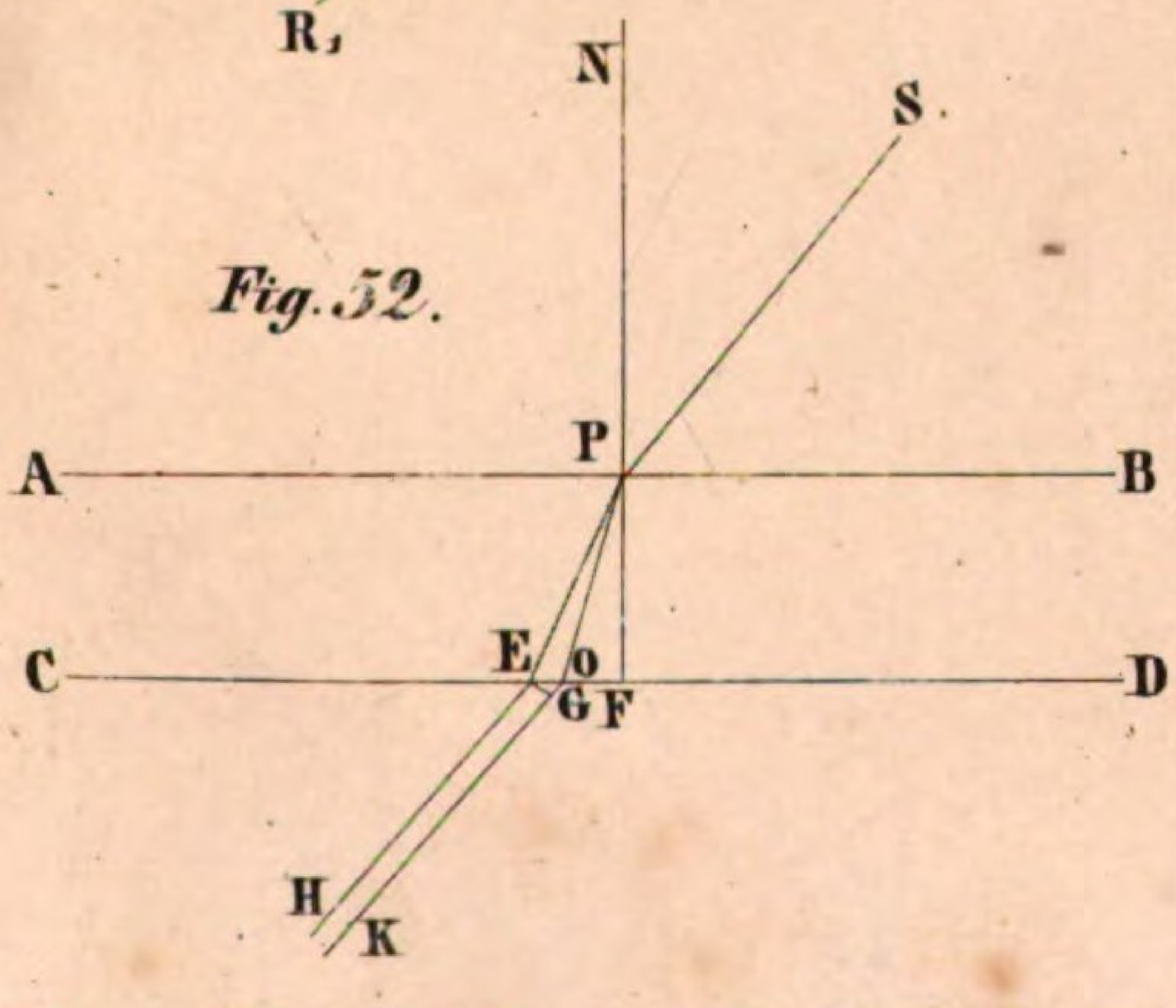
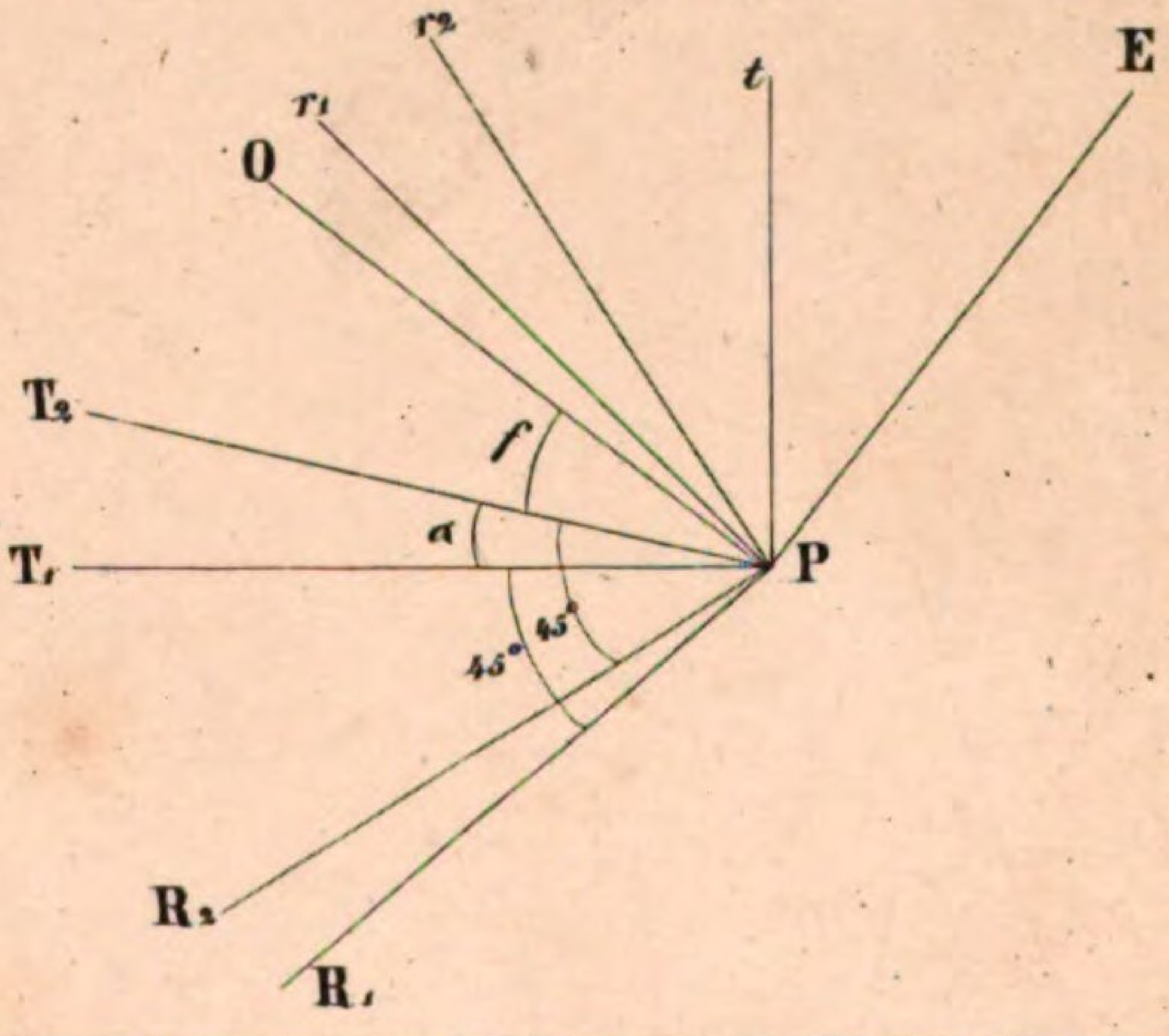


Fig. 53.



Herwig, litho:

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
München

H. HEINRICH
Buchbinderei
Rottenburg/L

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Knochenhauer, Carl Wilhelm,

Die Undulationstheorie des Lichtes eine Beilage zu den Lehrbüchern der Physik

Berlin 1839

4 Math.a. 162 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10052943-4